实变函数

刘绍武 莫海平 编著



黑龙江大学出版社
HEILONGJIANG UNIVERSITY PRESS

责任编辑/赵丽华

封面设计/语墨弘源



ISBN 978-7-81129-076

9 787811 290769 >

定价：26.00 元

实变函数

刘绍武 莫海平 编著



黑龍江大學出版社
HEILONGJIANG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

实变函数 / 刘绍武，莫海平编著. -- 哈尔滨：黑龙江大学出版社，2010.8

ISBN 978-7-81129-076-9

Ⅰ. ①实… Ⅱ. ①刘… ②莫… Ⅲ. ①实变函数 Ⅳ. ①O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 160924 号

书　　名	实变函数
著作责任者	刘绍武　莫海平 编著
出 版 人	李小娟
责 任 编 辑	赵丽华
出 版 发 行	黑龙江大学出版社(哈尔滨市学府路 74 号　150080)
网　　址	http://www.hljupress.com
电 子 信 箱	hljupress@163.com
电　　话	(0451)86608666
经　　销	新华书店
印　　刷	黑龙江省教育厅印刷厂
开　　本	787×1092　1/16
印　　张	12.75
字　　数	220 千
版　　次	2011 年 8 月第 1 版　2011 年 8 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-81129-076-9
定　　价	26.00 元

本书如有印装错误请与本社联系更换。

前　　言

实变函数是大学本科数学专业必修的一门重要的专业基础课程。这门课程的教学质量对于数学专业的人才培养质量和学科发展水平具有很大影响。针对人才培养目标和学生基础水平选一本合适的教材对于该课程的教学质量将起到至关重要的作用。实变函数课程建设在我国的一些大学已有几十年的历史,公开出版的教材也很多。一些经典教材深受教师和学生的喜爱,这些教材经过长期的教学实践检验被认为是很成熟的。既然有这么多这样的好教材,为什么还要花费很大的精力去编写一本新的实变函数教材呢?这主要是基于以下的原因:

满足一类高校数学专业实变函数课程教学的要求。这一类高校就是由高等师范专科学校升格为本科综合学院或本科师范学院的新建地方本科院校。这一类高校有相同和相似的建设和发展背景,因而这一类高校数学专业的课程建设以及相应的教材建设存在相同或相似的问题。这一类高校的数学专业在专科层次时就把实变函数课程列入教学计划中,有的作为必修课,有的作为选修课。尽管实变函数课程教材很多,然而几乎每一本教材对这一类高校的数学专业学生来说都有些"偏高",不言而喻,其教学效果难以尽如人意。而现在这一类院校中作为本科层次的数学专业开设实变函数课程,一方面要遵循统一的课程教学大纲,达到相应的培养规格要求;另一方面要根据学校的办学定位和培养目标以及学生的基础水平,在教学内容和方法改革上要有很强的针对性。那么,实变函数课程教学要达到这样的目标的一个重要依托就是要有针对性地搞好教材建设。编写这本教材的出发点就在于此。

本教材涵盖了实变函数课程的基本内容,就这些内容来说,在叙述上是很祥尽的。全书共分 7 章,第 1 章、第 2 章作为学习实变函数的必要准备,介绍了集合和

$\mathbf{R}^n$ 中点集的基本概念和相关结果；第 3 章、第 4 章是实变函数的基础内容，介绍 $\mathbf{R}^n$ 中点集的测度和 $\mathbf{R}^n$ 中可测集上可测函数的基本概念和相关理论；第 5 章、第 6 章是实变函数的核心内容，对 Lebesgue 积分以及积分与微分的运算关系作了比较详尽的叙述；第 7 章是实变函数的拓展内容，为学习后继的泛函分析课程提供了预备知识。因而它不仅适用于一类新建地方本科院校数学专业，也可供其他高校数学专业选用。这本教材的主要特点是注重基本概念的理解和基本方法的训练。对一些很重要的结果，在证明时虽然不难，但很麻烦，在一些教材都没有写出证明的事实都给出了令人比较满意的论证。在证明上注意从定义出发，以加深对基本概念的理解和基本方法的训练。在内容处理上注重前后联系，融会贯通，注意问题的产生背景和要解决什么问题的描述。力求使读者对实变函数的内容把握完整一些，对问题看得清楚一些。相信本教材会适用于初学者自学。本教材编写凝聚了编者多年的教学积累。尽管如此，由于水平和经验不足，问题或错误肯定会有的，这只是一个抛砖引玉之作，待有机会改编使之更加完善。

本教材的引言、第 1 章、第 4 章、第 6 章、第 7 章由刘绍武编写（共计 11 万字）；第 2 章、第 3 章、第 5 章由莫海平编写（共计 11 万字）。

编　者

2010 年 12 月

目　　录

引　言

实变函数是一门怎样的课程，它研究的是什么问题，这是初学者学习实变函数课程时想要知道的.

实变函数的核心内容是 Lebesgue[1] 积分. 那么 Lebesgue 积分是什么样的积分，它是怎么定义的，它与数学分析课程研究的 Riemann[2] 积分有什么不同呢？我们先来回顾一下 Riemann 积分的定义.

定义　设 $f(x):[a,b]\to\mathbf{R}$（实数集），$T:a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$（区间 $[a,b]$ 的一个分割），f 关于 T 的 Riemann 和 $R(f,T)=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$. 其中，$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$. 设 $\|T\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$.

若存在常数 J，使对 $[a,b]$ 的任意分割 T 及任意的 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$，有

$$\lim_{\|T\|\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=J,$$

则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，J 称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 Riemann 积分，记为 $J=(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 或 $J=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Riemann 积分在理论上对一些基本问题的解决并不令人满意。例如，什么样的函数是 Riemann 可积的，在数学分析课程中，一般地给出了以下结果：

(1) $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 是可积的；

(2) $[a,b]$ 上的单调函数 $f(x)$ 是可积的；

---

[1] 勒贝格(1875—1941)，法国数学家.

[2] 黎曼(1826—1866)，德国数学家.

(3) $[a,b]$ 上的只有有限个不连续点的有界函数 $f(x)$ 是可积的.

这三个结果都是充分条件，Riemann 积分理论不能给出一个充分必要条件.

还有一个在 Riemann 积分中称为牛顿—莱布尼兹(Newton[①]-Leibniz[②])公式的结果，就是如果 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\int_a^x f'(x)\mathrm{d}x = f(x) - f(a), x \in [a,b]$. 无疑，要求 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，条件太强了. 而在 Lebesgue 积分中就给出了一个牛顿—莱布尼兹公式成立的充分必要条件.

再有就是数学分析中 $[a,b]$ 上的可积函数列 $\{f_n\}$，若 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

即极限和积分可以交换次序，但是 $\{f_n\}$ 一致收敛于 $f(x)$，条件苛刻，且难以验证。在 Lebesgue 积分中，积分和极限交换次序不需要这个条件，条件减弱了，当然问题解决起来就方便了.

总而言之，Lebesgue 积分较 Riemann 积分有许多优越之处.

那么，Lebesgue 积分是怎样定义的呢？下面给出有界函数 Lebesgue 积分概念的描述：

设 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 是有界函数，即 $A \leqslant f(x) \leqslant B, x \in [a,b]$. 设 D 是区间 $[A,B]$ 的一个分割，

$$D: A = y_0 < y_1 < \cdots < y_{i-1} < y_i < \cdots < y_n = B,$$

f 关于 D 的 Lebesgue 和 $L(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i m\{x \mid y_{i-1} < f(x) \leqslant y_i\}$，其中 $\eta_i \in [y_{i-1}, y_i]$，$m\{x \mid y_{i-1} < f(x) \leqslant y_i\}$ 是点集 $\{x \mid y_{i-1} < f(x) \leqslant y_i\}$ 的“长度”(在实变函数课程中称为测度). 设 $\|D\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\{y_i - y_{i-1}\}$，若存在常数 J，使对 $[A,B]$ 的任意分割 D 以及任意的 $\eta_i \in [y_{i-1}, y_i]$ $(i = 1,2,\cdots,n)$，有

$$\lim_{\|D\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\eta_i m\{x \mid y_{i-1} < f(x) \leqslant y_i\} = J,$$

---

① 牛顿(Isaac Newton，1643—1727)，英国数学家、物理学家.

② 莱布尼茨(Gottfried Wilhelm Leibniz，1646—1716)，德国数学家.

则称 J 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 Lebesgue 积分，记为

$$J=(L)\int_{[a,b]}f(x)\mathrm{d}x \text{ 或 } J=\int_{[a,b]}f(x)\mathrm{d}x\,.$$

这样，需要研究的问题就出现了：

(1) 对于一般点集来说，什么是“长度”，也就是什么是测度，什么样的点集有测度；

(2) 什么样的函数 $f(x)$，使得对任何实数 c 和 d，点集 $\{x\mid c<f(x)\leqslant d\}$ 都有测度；

(3) 什么样的函数使得极限 $\lim\limits_{\|D\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\eta_i m\{x\mid y_{i-1}<f(x)\leqslant y_i\}$ 存在，且与分割 D 及 η_i 的取法无关.

实变函数课程正是从研究这些问题入手，循序渐进地展开的.

第1章 集 合

在现代数学中，集合的概念已被普遍运用．我们学过的数学课程在开始都要或多或少地介绍一些有关集合方面的知识．学习实变函数课程，掌握必要的集合论知识是必须的，因为集合论是实变函数论的基础．

有关集合论的重要文献首先是由德国数学家康托①在19世纪末发表的，后来逐步发展成为数学的一个分支，集合论中的某些概念和结果几乎已经渗透到所有的大学数学课程中，成为学习现代数学不可缺少的工具．

1.1 集合及其运算

1．集合与元素

集合或集是数学中的一个原始概念，即它不能用别的更简单的概念加以定义，对于什么是集合或者集合的概念是什么，就目前来讲，学习本课程，只要求掌握以下朴素的说法：

在一定范围内具有某种特定性质的对象的全体称做集合，集合中的每一个对象称为该集合中的元素．

我们常用大写英文字母 $A,B,C,D,\cdots$ 代表集合，而用小写英文字母 $a,b,c,d,\cdots$ 表示集合中的元素．如果 x 是集合 A 中的元素，则说 x 属于 A，记作 $x\in A$；若 x 不是集合 A 中的元素，就说 x 不属于 A，记作 $x\bar{\in} A$（有的文献也把 $x\bar{\in} A$ 记成 $x\notin A$）．

① 康托(Georg Cantor，1845—1918)，德国数学家．

需要指出的是，包括实变函数在内的一般数学课程所讨论的集合是确定性的，即给定一个集合 A 后，对于一个对象 x，“ x 属于 A ”或“ x 不属于 A ”这两者必居且仅居其一. 或者说，当我们使用集合的概念时，哪些对象是这个集合中的元素必须是明确的. 例如，“比 1 大得多的数的全体”虽然也是一个在一定范围内具有特定性质“比 1 大得多的数”的对象的全体，但它不是我们在实变函数这门课程中所讨论的集合，因为这个集合不具有确定性，这是一个模糊集合，是模糊数学课程讨论的内容.

集合的表示方法一般有两种：

一种是将集合中的元素按任意顺序逐一列在花括号内，并用逗号分开，称为**列举法**. 例如，$A = \{a,b,c\}$，$\mathbf{N} = \{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$，$C = \{2,3\}$.

另一种是利用集合中的元素满足某种条件或具有某种性质，将条件或性质用文字或符号在花括号内竖线的后面表示出来，称为**描述法**. 例如，$A = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$，$\mathbf{N} = \{x \mid x$ 是自然数 $\}$，$B = \{x \mid x$ 是实数，$f(x) \geqslant c\}$.

不含任何元素的集合称为**空集**，用记号 $\varnothing$ 表示. 例如，$\{x \mid x^2 + 2 = 0, x$ 是实数$\}$和 $\{x \mid |x| < 0\}$ 都是空集.

若集合中的元素只有有限个，称其为**有限集**，约定把空集也归属为有限集，不是有限集的集合称为**无限集**.

在没有作特定说明的情况下，常见的集合用以下符号表示：

$\mathbf{N}$ 为自然数集，$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots\}$；

$\mathbf{Z}$ 为整数集，$\mathbf{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$；

$\mathbf{Q}$ 为有理数集，$\mathbf{Q}=\{x \mid x$ 是有理数$\}$；

$\mathbf{R}$ 为实数集，$\mathbf{R}=\{x \mid x$ 是实数$\}$；

$\mathbf{C}$ 为复数集，$\mathbf{C} = \{x \mid x = a + bi, a,b \in \mathbf{R}, i = \sqrt{-1}\}$.

以后还用 $\mathbf{N}^+$ 表示正的自然数，即正整数集，$\mathbf{R}^+$ 表示正的实数集，等等.

2. 集合的包含关系

设 A,B 是两个集合，若 A 中的元素都是 B 中的元素，则称 A 是 B 的**子集**，记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$，读作 A 包含于 B 或 B 包含 A.

按照这种说法，A 不是 B 的子集，就是 A 中有元素不属于 B，记作 $A \not\subset B$，或 $B \not\supset A$. 即 $A \not\subset B$，当且仅当存在 $x \in A$ 而 $x \bar{\in} B$. 如果 $A \subset B$，而且又有 $B \subset A$，则 A,B 由相同的元素组成，就是同一集合，称 A 等于 B，记作 $A = B$. 如果 $A \subset B$，而 B 中确有元素 b 不属于 A，则称 A 是 B 的**真子集**.

例 1.1.1 设 $A = \{a\}, B = \{a,b\}, C = \{x \mid |x| \leqslant 0\}, D = \{0\}, E = (a,b]$ $(a < b), F = [a,b)(a < b), C[a,b] = \{f(x) \mid f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数 $\}$，$R[a,b] = \{f(x) \mid f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的 Riemann 可积函数 $\}$，则

$$A \subset B, C = D, E \not\subset F, F \not\subset E, C[a,b] \subset R[a,b].$$

例 1.1.2 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，试用适当的方法表示使函数值小于 2 的那些点的全体.

解 记 A 为使 $f(x)$ 小于 2 的点的全体，则 $A = \{x \mid x \in \mathbf{R}, f(x) < 2\}$.

例 1.1.3 $\mathbf{N}^+ \subset \mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.

例 1.1.4 对于任意集合 A,B,C，恒有

(1) $A \subset A$；

(2) 若 $A \subset B, B \subset C$，则 $A \subset C$.

证明 (1) 对任一 $x \in A$，则 $x \in A$，所以 $A \subset A$.

(2) 只须证明若 $x \in A$，则 $x \in C$. 事实上，对任一 $x \in A$，由 $A \subset B$ 可知 $x \in B$，又由 $B \subset C$，可知 $x \in C$，即对任一 $x \in A$，都有 $x \in C$，因此 $A \subset C$.

例 1.1.5 空集 $\varnothing$ 是任何集的子集.

证明 如果有某一集合 A，而 $\varnothing$ 不是 A 的子集，则有元素 $x \in \varnothing$，而 $x \bar{\in} A$，然而由于 $\varnothing$ 是空集，这是不可能的，因而命题得证.

另证：对任一集合 A，若 $x \bar{\in} A$，则必有 $x \bar{\in} \varnothing$，此即若 $x \in \varnothing$，则 $x \in A$，因此 $\varnothing \subset A$.

当我们在研究一个问题时，如果所考虑的一切集都是 X 的子集，这时便称 X 为**基本集**. 基本集是一个相对的概念. 由于研究的问题不同，所取的基本集也不同，而且不是唯一的，一般总是取一个比较方便的集合作为基本集. 在本书中如不加说明，可认为基本集是实数集 $\mathbf{R}$.

定义 1.1.1 设 A 是一个集合，由 A 的所有子集组成的集合，称为集合 A 的

幂集，记作 $P(A)$ 或 2^A .

例 1.1.6 设 $A=\{a\}, B=\{a,b\}, C=\{a,b,c\}, D=\varnothing$，则

$$P(A)=\{\varnothing,\{a\}\};$$

$$P(B)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\};$$

$$P(C)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\};$$

$$P(D)=\{\varnothing\}.$$

定理 1.1.1 如果有限集合 A 的元素个数为 n，则其幂集 $P(A)$ 的元素个数为 2^n .

证明 A 的所有由 m 个 $(1\leqslant m\leqslant n)$ 元素组成的子集的个数为从 n 个元素中取出 m 个元素的组合数 C_n^m .

此外，因为 $\varnothing\subset A$，所以 $P(A)$ 的元素个数 S 可以表示为

$$S=1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=\sum_{m=0}^{n}C_n^m.$$

由二项式定理可知：

$$(x+y)^n=C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}y+C_n^2x^{n-2}y^2+\cdots+C_n^ny^n.$$

令 $x=y=1$，便有

$$2^n=(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=S.$$

因此 $P(A)$ 的元素个数是 2^n .

例 1.1.7 设 A 和 B 是两个集合，试证明 $A\subset B$ 的充分必要条件是 $P(A)\subset P(B)$.

证明 必要性. 设 $A\subset B$，任取 $x\in P(A)$，则 x 是 A 的子集，所以 $x\subset A$，由 $A\subset B$，可知 $x\subset B$，即 x 是 B 的子集，由此，$x\in P(B)$，从而 $P(A)\subset P(B)$.

充分性. 设 $P(A)\subset P(B)$，任取 $x\in A$，则 $\{x\}$ 是 A 的子集，即 $\{x\}\in P(A)$，由 $P(A)\subset P(B)$，可知 $\{x\}\in P(B)$，所以 $\{x\}$ 是 B 的子集，因此，$x\in B$，从而 $A\subset B$.

3. 集合的基本运算

从给定的一些集合出发，我们可以通过所谓集合的运算作出一些新的集合，最常用的运算有并、交、差三种，在这里称为集合的基本运算.

设 A,B 是两个集合，由集合 A 和集合 B 的一切元素所组成的集合称为 A 与 B 的**并集**或**和集**，简称为**并**，记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

由所有既属于集合 A 又属于集合 B 的元素所组成的集合，称为 A 与 B 的**交集**，简称为**交**，记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

由属于集合 A 而不属于集合 B 的那些元素所组成的集合，称为 A 与 B 的**差集**，记作 $A-B$ 或 $A\backslash B$，即

$$A-B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\bar{\in} B\}.$$

当 $B\subset A$ 时，称差集 $A-B$ 为 B 关于 A 的**余集**，记作 C_AB.

关于基本集(设 S 是基本集)的差集 $S-B$ 常简记为 CB 或 B^c，并简称它是 B 的余集.

并与交的运算可以推广到任意多个集合的情形，设 $\{A_\alpha\mid\alpha\in I\}$ 是任意集族，其中 α 是指标，I 是指标集. 则由一切 $A_\alpha(\alpha\in I)$ 的所有元素所组成的集合称为这个集族的并集，记为 $\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$，即

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x\mid \text{存在某个 } \alpha\in I,\text{ 使 } x\in A_\alpha\}.$$

而由一切同时属于每个 $A_\alpha(\alpha\in I)$ 的元素所组成的集合，称为这个集族的交集，记为 $\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$，即

$$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x\mid \text{对一切 } \alpha\in I,\text{ 有 } x\in A_\alpha\}.$$

当指标集 I 是正整数集 $\mathbf{N}^+$ 时，$\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$ 或 $\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$ 可记为 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 或 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

定理 1.1.2 德摩根[①]对偶公式.

(1) $C(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcap\limits_{\alpha\in I}CA_\alpha$；

(2) $C(\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in I}CA_\alpha$.

证明 这里只证明(1)，(2)留给读者证明.

设 $x\in C(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)$，则 $x\bar{\in}\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\Rightarrow$ 对一切 $\alpha\in I, x\bar{\in}A_\alpha\Rightarrow$ 对一切 $\alpha\in I, x\in$

① 德摩根(De Morgan，1806—1871)，英国数学家.

$CA_\alpha \Rightarrow x \in \bigcap_{\alpha\in I} CA_\alpha \Rightarrow C(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha) \subset \bigcap_{\alpha\in I} CA_\alpha$.

又设 $x \in \bigcap_{\alpha\in I} CA_\alpha$，则对一切 $\alpha \in I, x \in CA_\alpha$

$$\Rightarrow \text{对一切 } \alpha \in I, x \bar{\in} A_\alpha$$

$$\Rightarrow x \bar{\in} \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$$

$$\Rightarrow x \in C(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha)$$

$$\Rightarrow \bigcap_{\alpha\in I} CA_\alpha \subset C(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha).$$

综上，$C(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in I} CA_\alpha$.

集合的并、交、差运算具有许多性质，下面列出这些性质中常用的几条，它们是集合运算的基本定律.

设 S 是基本集，其余是 S 的子集.

(1) 交换律：$A \cup B = B \cup A$；$A \cap B = B \cap A$.

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$；$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$.

(3) 分配律：$A \cap (\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in I}(A \cap B_\alpha)$；$A \cup (\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in I}(A \cup B_\alpha)$.

(4) 等幂律：$A \cup A = A$；$A \cap A = A$.

(5) 互补律：$A \cup CA = S$；$A \cap CA = \varnothing$.

(6) 对合律：$C(CA) = A$.

(7) 吸收律：$A \cup (A \cap B) = A$；$A \cap (A \cup B) = A$.

此外，还有

(8) $CS = \varnothing$；$C\varnothing = S$.

(9) $A - B = A \cap CB$.

(10) 若 $A \subset B$，则 $CB \subset CA$.

(11) $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$.

(12) 若 $A_\alpha \subset B_\alpha, \alpha \in I$，则 $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \subset \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha$，$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \subset \bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha$.

以上关于集合运算的恒等式，都能由定义加以证明.

例 1.1.8 证明分配律 $A \cup (\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in I}(A \cup B_\alpha)$.

证明 设 $x \in A \cup (\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha)$，则 $x \in A$ 或 $x \in \bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha$

$$\Rightarrow x \in A \text{ 或对一切 } \alpha \in I, x \in B_\alpha$$

$$\Rightarrow \text{对一切 } \alpha \in I, x \in A \cup B_\alpha$$

$$\Rightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in I}(A \cup B_\alpha)$$

$$\Rightarrow A \cup (\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha) \subset \bigcap_{\alpha \in I}(A \cup B_\alpha).$$

又设 $x \in \bigcap_{\alpha \in I}(A \cup B_\alpha)$，则对一切 $\alpha \in I, x \in A \cup B_\alpha$

$$\Rightarrow \text{若 } x \bar{\in} A \text{，则对一切 } \alpha \in I, x \in B_\alpha$$

$$\Rightarrow x \in A \text{ 或对一切 } \alpha \in I, x \in B_\alpha$$

$$\Rightarrow x \in A \cup (\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha)$$

$$\Rightarrow \bigcap_{\alpha \in I}(A \cup B_\alpha) \subset A \cup (\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha).$$

综上，$A \cup (\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I}(A \cup B_\alpha)$.

例 1.1.9 设 $A_\alpha = \{x \mid \alpha - 1 < x \leqslant \alpha\}, \alpha \in \mathbf{R}$，则 $\bigcup_{\alpha \in \mathbf{R}} A_\alpha = (-\infty, +\infty)$.

证明 对任意的 $\alpha \in \mathbf{R}$，有 $A_\alpha \subset (-\infty, +\infty)$，所以 $\bigcup_{\alpha \in \mathbf{R}} A_\alpha \subset (-\infty, +\infty)$. 反之，设 $x \in (-\infty, +\infty)$，则

$$x \in (x-1, x] = A_x \Rightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in \mathbf{R}} A_\alpha \Rightarrow (-\infty, +\infty) \subset \bigcup_{\alpha \in \mathbf{R}} A_\alpha,$$

因此

$$\bigcup_{\alpha \in \mathbf{R}} A_\alpha = (-\infty, +\infty).$$

例 1.1.10 设 $A_i = \left\{x \mid -1 + \frac{1}{i} \leqslant x \leqslant 1 - \frac{1}{i}\right\} (i = 1, 2, \cdots)$，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = (-1, 1)$.

证明 若 $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$，则有 i_0 使 $x \in A_{i_0} \subset (-1, 1) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset (-1, 1)$.

反之，若 $x \in (-1, 1)$，则有 i_1 使 $x \geqslant -1 + \frac{1}{i_1}$，也有 i_2 使 $x \leqslant 1 - \frac{1}{i_2}$，取 $i_3 = \max\{i_1, i_2\}$，则

$$x \in A_{i_3} \Rightarrow x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow (-1, 1) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

综上，$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = (-1, 1)$.

例 1.1.11 设 $A_i = [0, 2 - \frac{1}{i}], i \in \mathbf{N}^+$，则

(1) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = [0, 2)$；

(2) $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = [0,1]$.

证明 先证(1). 因为对任意的 $i \in \mathbf{N}^+$，有 $A_i = [0,2-\frac{1}{i}] \subset [0,2)$，所以 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset [0,2)$.

反之，设 $x \in [0,2)$，即 $0 \leqslant x < 2$，则有充分大的 $i_0 \in \mathbf{N}^+$，使 $0 \leqslant x \leqslant 2-\frac{1}{i_0} < 2$，即 $x \in A_{i_0}$，因此 $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$，这样 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = [0,2)$.

再证(2). 因为 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \subset A_1$，而 $A_1 = [0,1]$，所以 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \subset [0,1]$.

又因为

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_i \subset A_{i+1} \subset \cdots,$$

所以，对任意的 $i \in \mathbf{N}^+$，有 $[0,1] = A_1 \subset A_i$，因此 $[0,1] \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$，这样 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = [0,1]$.

例 1.1.12 设 $A_i = \left\{x \mid -\frac{1}{i} < x < \frac{1}{i}\right\}, i \in \mathbf{N}^+$，则

(1) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \left\{x \mid -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}\right\}$；

(2) $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{0\}$.

证明 先证(1). 因为 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n$，所以 $\bigcap_{i=1}^{n} A_n = A_n = \left\{x \mid -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}\right\}$.

再证(2). 由 $0 \in A_i$，$i \in \mathbf{N}^+ \Rightarrow 0 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow \{0\} \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$. 以下证明 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \subset \{0\}$，只须证明若 $x \neq 0$，则 $x \bar{\in} \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$. 事实上，若 $x \neq 0$，则 $|x| > 0$，存在 $i_0 \in \mathbf{N}^+$，使 $|x| > \frac{1}{i_0} \Rightarrow x > \frac{1}{i_0}$ 或 $x < -\frac{1}{i_0} \Rightarrow x \bar{\in} A_{i_0} \Rightarrow x \bar{\in} \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$，因此 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \subset \{0\}$. 综上，$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{0\}$.

1.2 集合列的极限运算

在实变函数中，对某些问题的研究，经常不可避免地要涉及一列集合，以及当

$n \to \infty$ 时，一列集合的"极限"，所以我们现在来定义集合序列的极限.

就像数列未必有极限，集合序列当然也可能没有极限，类似数列的上下极限概念，我们可以定义集合的上下限集.

定义 1.2.1 设 $\{A_n\}$ 是一列集合，由属于该集列中无限多个集的那种元素的全体所组成的集称为这一集列的**上限集**或**上极限**，记为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ 或 $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$；而除有限个集外，属于该集列中每个集的那种元素全体所组成的集称为这一集列的**下限集**或**下极限**，记为 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ 或 $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$. 由定义，$\{A_n\}$ 的上限集和下限集还是一个集合. 并且

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \{x \mid 对任意的\ N \in \mathbf{N}^+，存在\ n \geqslant N，使\ x \in A_n\}, \tag{1.2.1}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \{x \mid 存在\ N \in \mathbf{N}^+，当\ n \geqslant N\ 时，x \in A_n\}. \tag{1.2.2}$$

显然有如下包含关系

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \subset \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{1.2.3}$$

例 1.2.1 设有集列 $\{A_n\}$，其中：

$$A_{2m+1} = \left[0, 2 - \frac{1}{2m+1}\right] (m = 0, 1, 2, \cdots);$$

$$A_{2m} = \left[0, 1 + \frac{1}{2m}\right] (m = 1, 2, \cdots).$$

求 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ 和 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$.

解 考察 $[0,1]$，当 $x \in [0,1]$，则 $x \in A_n (n = 1, 2, \cdots)$.

考察 $(1,2)$，当 $x \in (1,2)$，存在 $N_1(x)$，使得 $n > N_1(x)$ 时，有 $x > 1 + \frac{1}{2n}$；也存在 $N_2(x)$，使得 $n > N_2(x)$ 时，有 $x < 2 - \frac{1}{2n+1}$. 取 $N(x) = \max\{N_1(x), N_2(x)\}$，则当 $n > N(x)$ 时，有 $1 + \frac{1}{2n} < x < 2 - \frac{1}{2n+1}$，即当 $n > N(x)$ 时，$x \notin A_{2n}$，但 $x \in A_{2n+1} \Rightarrow x \in \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$，$x \notin \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$，而对于 $[0,2)$ 以外的点 x，x 不属于任何 A_n，所以

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = [0, 2), \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = [0, 1].$$

例 1.2.2 设 $A_n = \left[0, 1+\frac{1}{n}\right](n=1,2,\cdots)$，求 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ 及 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$.

解 当 $x<0$ 时，x 不属于任何 A_n .

当 $x>1$ 时，存在 $N(x)\in \mathbf{N}^+$，使当 $n>N(x)$ 时，$x>1+\frac{1}{n}$，即当 $n>N(x)$ 时，$x \bar{\in} A_n$.

当 $x\in[0,1]$ 时，$x\in A_n, n=1,2,\cdots$.

所以 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n=[0,1]$，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n=[0,1]$.

例 1.2.3 设有集列 $\{A_n\}$，其中

$$A_{2n}=\left\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2n, 0\leqslant y\leqslant \frac{1}{2n}\right\}(n=1,2,\cdots);$$

$$A_{2n+1}=\left\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2n+1}, 0\leqslant y\leqslant 2n+1\right\}(n=1,2,\cdots).$$

则

$$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n=\{(0,0)\}, \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n=\{(x,0)\mid x\geqslant 0\}\cup\{(0,y)\mid y\geqslant 0\}.$$

证明 对于 (x,y) 作以下分析讨论：

(1) 若 $x<0$ 或 $y<0$，则 (x,y) 不属于任何一个 $A_n(n=1,2,\cdots)$.

(2) 若 $x>0$，则存在 $N(x)\in\mathbf{N}^+$，当 $n>N(x)$ 时，$x>\frac{1}{2n+1}\Rightarrow(x,y)\bar{\in} A_{2n+1}$，即 $\{A_n\}$ 中有无限多个集不含 (x,y)；

若 $y>0$，则存在 $N(y)\in\mathbf{N}^+$，当 $n>N(y)$ 时，$y>\frac{1}{2n}\Rightarrow(x,y)\bar{\in} A_{2n}$，即 $\{A_n\}$ 中有无限多个集不含 (x,y)，所以 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n=\{(0,0)\}$.

(3) 若 $x>0$ 且 $y>0$，由(2)的讨论可知，当 $n>K=\max\{N(x),N(y)\}$ 时，(x,y) 不属于 A_n，即 $\{A_n\}$ 中含有 (x,y) 的集合不会是无穷多个，因此 $(x,y)\bar{\in}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$.

(4) 若 $x=0$ 且 $y\geqslant 0$，则有 n_0，使 $0\leqslant y\leqslant 2n_0+1$，这样当 $n\geqslant n_0$ 时，$(x,y)=(0,y)\in A_{2n+1}$；

若 $y=0$ 且 $x\geqslant 0$，则有 n_1，使 $0\leqslant x\leqslant 2n_1$，这样当 $n\geqslant n_1$ 时，$(x,y)=(x,0)\in A_{2n}$.

综上，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n = \{(x,0) \mid x \geqslant 0\} \cup \{(0,y) \mid y \geqslant 0\}$，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n = \{(0,0)\}$.

集列 $\{A_n\}$ 的上限集与下限集都可以用集列 $\{A_n\}$ 的并和交来表示，它们的表达式是：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m, \tag{1.2.4}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m. \tag{1.2.5}$$

证明 为叙述方便，由式(1.2.1)和式(1.2.2)，设 $A = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n = \{x \mid$ 对任意的 $n \in \mathbf{N}^+$，存在 $m \geqslant n$，使 $x \in A_m\}$；$C = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n = \{x \mid$ 存在 $n \in \mathbf{N}^+$，当 $m \geqslant n$ 时，$x \in A_m\}$；$B = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}A_m$；$D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{m=n}^{\infty}A_m$.

这样，只须证 $A = B, C = D$.

若 $x \in A$，则对任意的 $n \in \mathbf{N}^+$，总有 $m \geqslant n$，使 $x \in A_m$，即对任何 $n \in \mathbf{N}^+$，总有

$$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty}A_m \Rightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m = B.$$

反之，若 $x \in B$，则对任意的 $N \in \mathbf{N}^+$，总有 $x \in \bigcup\limits_{m=N}^{\infty}A_m$，这样，存在 $m \geqslant N$，使 $x \in A_m \Rightarrow x \in \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n = A$. 于是 $A = B$，式(1.2.4)成立.

若 $x \in C$，则存在 $n \in \mathbf{N}^+$，使当 $m \geqslant n$ 时，$x \in A_m$，即存在 $n \in \mathbf{N}^+$，使

$$x \in \bigcap_{m=n}^{\infty}A_m \Rightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m = D.$$

反之，若 $x \in D$，则存在 $N \in \mathbf{N}^+$，使 $x \in \bigcap\limits_{m=N}^{\infty}A_m$，即存在 $N \in \mathbf{N}^+$，当 $m \geqslant N$ 时，有 $x \in A_m \Rightarrow x \in \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n = C$. 于是 $C = D$，式(1.2.5)成立.

定义 1.2.2 设 $\{A_n\}$ 是一集列，如果 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$，则称集列 $\{A_n\}$ 收敛，将 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$ 或 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$ 称为集列 $\{A_n\}$ 的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$.

定义 1.2.3 如果集列 $\{A_n\}$ 满足 $A_n \subset A_{n+1}$ $(A_n \supset A_{n+1})$ $(n = 1,2,\cdots)$，则称 $\{A_n\}$ 是单调增加(减少)集列. 单调增加与单调减少集列统称为单调集列.

单调集列是收敛的.

定理 1.2.1 如果 $\{A_n\}$ 是单调增加集列，则 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$；如果 $\{A_n\}$ 是单

调减少集列，则 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

证明 由式(1.2.3)，有 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subset \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n \subset \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.
若 $\{A_n\}$ 单调增加，如果 $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$，则有 $n_0 \in \mathbf{N}^+$，使 $x \in A_{n_0} \subset A_{n_0+1} \subset \cdots$，所以 $x \in \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$，因此，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subset \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n \subset \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$.

这样，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 且 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

若 $\{A_n\}$ 单调减少，如果 $x \in \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$，则有 $N \in \mathbf{N}^+$，当 $n > N$ 时，$x \in A_n$，即 $x \in A_{N+1}, A_{N+2}, \cdots$，而 $\{A_n\}$ 单调减少 $\Rightarrow x \in A_{N+1} \subset A_N \subset A_{N-1} \subset \cdots \subset A_2 \subset A_1$，这样 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$，因此 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$，于是 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

又因为 $\{A_n\}$ 单调减少，所以 $\bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m = A_n \Rightarrow \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$，从而，有 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 且 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

例 1.2.4 设 $A_n = \left\{x \mid -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}\right\} (n = 1,2,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

解 因为 $\{A_n\}$ 是单调减少集列，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$ (见例 1.1.12).

例 1.2.5 设 $A_n = \left\{x \mid -1+\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1-\frac{1}{n}\right\} (n = 1,2,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

解 因为 $\{A_n\}$ 是单调增加集列，于是 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = (-1,1)$ (见例 1.1.10).

1.3 映射与基数(势)

在现实生活中，当我们谈到一组对象时，很自然地会涉及到这一组对象的个数. 讨论集合问题时也是这样，当我们不考虑集合中元素的性质而抽象地研究集合时，集合中所含元素的多少或者说元素的个数则是一个最基本的概念. 比如一个由 50 名学生组成的集合与一个教室里由 50 个座位组成的集合，这是两个不同的集合. 当我们不考虑它们的元素的具体属性时，则有一点却是共同的，即它们的元素个数相同，都是由 50 个元素组成的集合. 而一个由 50 名学生组成的集合与另一个由 30 名学生组

成的集合,虽然它们都是由学生组成的集合,但它们的元素个数却不相同.可见抽象地研究集合时,集合中所含元素的多少是一个集合非常值得重视的属性.

怎样表示集合所含元素的多少,以及怎样比较两个集合所含元素的多少,这是本节要讨论的问题.为此先明确有限集和无限集的概念.我们把空集与只含有有限多个元素的集合称为**有限集**,而把不是有限集的集合称为**无限集**或**无穷集**.集合所含元素多少的问题,对有限集来说,只要把它的元素一个一个数出来就行了,而对于无限集来说,问题就很复杂了.在这里,“个数”一词尽管实际上没有直观的意义,然而,由于不同的无限集之间有着明显的差别,它们所含元素的多少是可以比较的,比如自然数全体和实数全体,它们都是无穷集,但它们在元素“个数”的“数量级”上是不同的,这从直觉上我们也能感觉到.那么对于自然数全体和有理数全体,如果凭直觉认为有理数比自然数多,那就错了,事实上,自然数全体与有理数全体之间元素“个数”的“数量级”是相同的.因此,在无限集元素“个数”的问题上,直觉是不可靠的,有必要对无限集元素“个数”问题进行研究,使我们得以分清哪些集合有相同的元素“个数”,哪些则不同.

现在我们回过头来看看有限集元素的个数是怎样确定的,对确定一个教室中的学生全体这个有限集(记为 A)的人数来说,方法就是一个一个地“数”,从 1 开始数到 n,我们就说这个教室有 n 个人.这个问题的解决实质上是把这个教室中的学生全体的集合 A 与正整数集 $\mathbf{N}^+$ 的子集 $\{1,2,\cdots,n\}$ 一对一地对应起来,为叙述方便,我们称 $\{1,2,\cdots,n\}$ 为正整数列的某一截段,并记 $M_n=\{1,2,\cdots,n\}$.对于有限集之间元素个数的比较也是这样,当我们比较一个教室的学生和座位是否相等,若不相等哪个多时,我们也可以把学生和座位对应起来,如果是一对一地对应,则学生数和座位数相同;如果学生都坐下来还有剩余的座位,则座位比学生多;如果每个座位都坐下一名学生,还有没坐下的学生,则学生比座位多.从这里我们看到,用一对一的对应方法能解决有限集元素个数和两个集合元素个数比较的问题,这启发我们解决无限集元素“个数”的比较问题也可以用这种一对一的对应方法.

1.3.1 映射和一一对应

定义 1.3.1 设 A,B 是两个非空集合,如果存在一个法则 φ ,使得对于 A 中任

何一个元素 x，按照法则 φ，在 B 中有唯一确定的元素 y 与 x 对应，记为

$$\varphi: x \to y,$$

那么称这个法则 φ 是从 A 到 B（中）的映射，记为

$$\varphi: A \to B.$$

当映射 φ 使 y 和 x 对应时，y 称为 x 在映射 φ 下的**像**，记作 $y=\varphi(x)$.

对于任何固定的 $y \in B$，称适合关系 $y=\varphi(x)$ 的 $x \in A$ 的全体为元素 y 在 φ 之下的**原像**，记为 $\varphi^{-1}(y)$，集合 A 称为映射 φ 的**定义域**，记为 $D(\varphi)$. 设 C 是 A 的子集，C 中所有元素的像的全体记为 $\varphi(C)$，称它是子集 C 在 φ 之下的像. 称 $\varphi(A)$ 为映射 φ 的**值域**，记为 $R(\varphi)$.

定义 1.3.2 设 φ 是 A 到 B 的一个映射.

(1) 若对任意的 $x_1, x_2 \in A$，当 $x_1 \neq x_2$ 时，有 $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$，则称 φ 是 A 到 B 的**单射**；

(2) 若 $\varphi(A)=B$，则称 φ 是 A 到 B 的**满射**，或称 φ 是 A 到 B 上的映射；

(3) 若 φ 既是 A 到 B 的单射，又是 A 到 B 的满射，则称 φ 是 A 到 B 的**双射**，或称 φ 是 A 到 B 的一一对应（或一一映射），记作：

$$\varphi: A \leftrightarrow B.$$

定义 1.3.3 设 φ 为 A 到 B 的一一映射，作 B 到 A 的映射 ψ 如下：对每一个 $y \in B$，由 φ 是一一映射，则 y 在 φ 之下有唯一的原像 x，令 $\psi: y \to x$，则 ψ 是映射，称 ψ 是 φ 的逆映射，记 ψ 为 φ^{-1}. 并且 $\varphi^{-1}: B \to A$ 也是一一映射.

例 1.3.1 证明：(1) $\varphi(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\varphi(A_i)$；(2) $\varphi(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) \subset \bigcap_{i=1}^{\infty}\varphi(A_i)$.

证明 (1) 按证明集合相等的方法.

$$\begin{aligned} y \in \varphi(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) &\Leftrightarrow \text{存在 } x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \text{使 } \varphi(x)=y \\ &\Leftrightarrow \text{存在 } x \in A_{i_0}(1 \leqslant i_0 < +\infty), \text{使 } \varphi(x)=y \\ &\Leftrightarrow y \in \varphi(A_{i_0})(1 \leqslant i_0 < +\infty) \\ &\Leftrightarrow y \in \bigcup_{i=1}^{\infty}\varphi(A_i). \end{aligned}$$

所以 $\varphi(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\varphi(A_i)$.

(2) 按证明集合包含的方法.

$$y \in \varphi(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) \Rightarrow \text{存在 } x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\text{，使 } \varphi(x) = y$$
$$\Rightarrow y \in \varphi(A_i), i = 1,2,\cdots$$
$$\Rightarrow y \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i)$$

所以 $\varphi(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i)$.

注：$\bigcap_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i) \subset \varphi(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)$ 不一定成立，因为由 $y \in \varphi(A_i)(i = 1,2,\cdots)$ 不能得到存在 $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 使 $\varphi(x) = y$. 比如可能存在 $x_i \in A_i$，使 $\varphi(x_i) = y$，也存在 $x_j \in A_j$，使 $\varphi(x_j) = y$，而 $i \neq j$，且 $x_i \neq x_j$.

2. 集合的对等和基数(势)

定义 1.3.4 设 A,B 是两个集合，如果存在一个 A 到 B 的一一对应 φ，那么称集合 A 与集合 B 对等(或相似)，记为 $A \sim B$. 规定空集 $\varnothing$ 和自身对等.

例 1.3.2 正奇数集 $\mathbf{O}^+ = \{1,3,5,\cdots,2n-1,\cdots\}$ 和正偶数集 $\mathbf{E}^+ = \{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}$ 对等.

证明 作映射 $\varphi: \mathbf{O}^+ \to \mathbf{E}^+$，使对任意的 $x \in \mathbf{O}^+$，令 $\varphi(x) = x+1$，则 φ 是 $\mathbf{O}^+$ 到 $\mathbf{E}^+$ 的一一对应，所以 $\mathbf{O}^+ \sim \mathbf{E}^+$.

例 1.3.3 正整数集 $\mathbf{N}^+ = \{1,2,\cdots,n,\cdots\}$ 和正偶数集 $\mathbf{E}^+ = \{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}$ 对等.

证明 作映射 $\varphi: \mathbf{N}^+ \to \mathbf{E}^+$，使对任意的 $n \in \mathbf{N}^+$，令 $\varphi(n) = 2n$，则 φ 是 $\mathbf{N}^+$ 到 $\mathbf{E}^+$ 的一一对应，所以 $\mathbf{N}^+ \sim \mathbf{E}^+$.

例 1.3.4 区间 $(0,1)$ 和实数全体 $\mathbf{R}$ 对等.

证明 作映射 $\varphi: (0,1) \to \mathbf{R}$，使对任意的 $x \in (0,1)$，令 $\varphi(x) = \tan(\pi x - \frac{\pi}{2})$. 则 φ 是 $(0,1)$ 到 $\mathbf{R}$ 的一一对应，所以 $(0,1) \sim \mathbf{R}$.

例 1.3.5 区间 $(0,1)$ 和区间 $(0,+\infty)$ 对等.

证明 作映射 $\varphi: (0,1) \to (0,+\infty)$，使对任意的 $x \in (0,1)$，令 $\varphi(x) = \tan\frac{\pi}{2}x$. 则 φ 是 $(0,1)$ 到 $(0,+\infty)$ 的一一对应，所以 $(0,1)$ 和 $(0,+\infty)$ 对等.

例 1.3.6 区间 $[0,1)$ 和区间 $(0,1]$ 对等.

证明 作映射 $\varphi:[0,1)\to(0,1]$，令

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & x=0;\\ x, & 0<x<1.\end{cases}$$

则 φ 是 $[0,1)$ 到 $(0,1]$ 的一一对应，所以 $[0,1)\sim(0,1]$.

例 1.3.3、例 1.3.4 和例 1.3.5 说明，一个无限集可以和它的一个真子集对等，这一性质正是无限集的特征，对有限集来说，这一性质是不能成立的，这样我们可以看到无限集与有限集之间的深刻差异. 由此，我们利用对等的概念给出有限集、无限集严格的数学定义.

定义 1.3.5 若集合 A 为空集或与某个 $M_n=\{1,2,\cdots,n\}$ 对等，则称 A 是有限集，凡能与自身的某一个真子集对等的集合称为无限集.

对等关系有以下性质：

定理 1.3.1 对任意集合 A,B,C，恒有

(1) 自反性，$A\sim A$；

(2) 对称性，若 $A\sim B$，则 $B\sim A$；

(3) 传递性，若 $A\sim B,B\sim C$，则 $A\sim C$.

该定理可由定义直接得到. 由此可知，对等是等价关系.

定理 1.3.2 设 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$ 为两个集列. $\{A_n\}$ 中任何两个集不相交，$\{B_n\}$ 中的集也是两两不相交的，即 $A_i\cap A_j=\varnothing$，$B_i\cap B_j=\varnothing(i\neq j)$，如果 $A_n\sim B_n(n=1,2,\cdots)$，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\sim\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$.

证明 对任意的 $n\in\mathbf{N}^+$，由 $A_n\sim B_n$，存在 A_n 到 B_n 的一一对应 $\varphi_n:A_n\leftrightarrow B_n$. 作 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ 到 $\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$ 的一个映射 φ 如下：对任意的 $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，必有唯一的 $i\in\mathbf{N}^+$，使 $x\in A_i$，令 $\varphi(x)=\varphi_i(x)(\varphi_i(x)\in B_i\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n)$，则 φ 是 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ 到 $\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$ 的映射，容易验证 φ 是 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ 到 $\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$ 的一一对应，因此 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\sim\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$.

定义 1.3.6 设 A,B 是两个集合.

(1) 如果 A 和 B 对等，那么称 A 和 B 具有相同的基数(或势)，记集合 A 的基数为 $\overline{\overline{A}}$，A 和 B 具有相同基数时，记为 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$；

(2) 如果 A 对等于 B 的某个子集 B_1，那么称 A 的基数小于或等于 B 的基数，或称 B 的基数大于或等于 A 的基数，记为 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$ 或 $\overline{\overline{B}} \geqslant \overline{\overline{A}}$；如果 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$，并且 $\overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{B}}$，那么称 A 的基数小于 B 的基数，或 B 的基数大于 A 的基数，记为 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$ 或 $\overline{\overline{B}} > \overline{\overline{A}}$.

集合的基数的概念可以看做有限集合中所含元素个数的推广. 要对基数给出一个精确的定义是一件相当复杂的事情. 我们可以这样来描述：把所有的集合进行分类，两个集合当且仅当对等时属于同一类，每一类给予一个特定的记号，称为该类中每一个集合的基数或势. 一个集合的基数是所有与之对等的集合所共同具备的特征. 对任何集合 A 和 B，$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$，当且仅当 $A \sim B$. 对有限集来说，因为它或为空集或与某个 $M_n = \{1,2,\cdots,n\}$ 对等，我们就用 n 作为所有与 M_n 对等的这类集合的特定的记号，于是有限集的基数即元素的个数 n，基数相等也即元素的个数相等，这就把有限集的基数和通常的个数概念统一起来了. 而对无限集来说，比如与正整数集 $\mathbf{N}^+ = \{1,2,\cdots,n,\cdots\}$ 对等的那一类集合，这一类集合以 $\mathbf{N}^+ = \{1,2,\cdots,n,\cdots\}$ 为代表，我们记 $\overline{\overline{\mathbf{N}^+}} = a$，$a$ 也是所有与 $\mathbf{N}^+$ 对等的这类集合的特定的记号，即这一类集合中的每一个集合的基数都是 a，这当然就是通常元素个数概念的推广.

3. 伯恩斯坦[①]定理

是否所有的无限集都有相同的基数呢？在本节引言中已经提到凭直觉自然数全体 $\mathbf{N}$ 和实数全体 $\mathbf{R}$，它们的基数应该是不同的. 关于这个结论在后面会给出证明的. 既然两个无限集可能有不同的基数，如何进行比较呢？下面的定理给出了一个十分有效的方法.

定理 1.3.3(伯恩斯坦定理) 设 A 和 B 是两个集合，如果 A 与 B 的某个子集对等，B 又与 A 的某个子集对等，则 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.

证明 不妨设 $A_1 \subset A$，$B_1 \subset B$，使得 $A \sim B_1$，$B \sim A_1$，而 φ_1 是 A 和 B_1 之间的一一对应，φ_2 是 B 和 A_1 之间的一一对应，于是，记：

---

① 伯恩斯坦(F. Bernstein，1878—1956)，德国数学家.

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \varphi_2(B), & B_1 &= \varphi_1(A),\\
A_2 &= \varphi_2(B_1), & B_2 &= \varphi_1(A_1),\\
A_3 &= \varphi_2(B_2), & B_3 &= \varphi_1(A_2),\\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots\\
A_{n+1} &= \varphi_2(B_n), & B_{n+1} &= \varphi_1(A_n),\\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

这就是说：

$$
\begin{aligned}
B &\sim A_1, & A &\sim B_1,\\
B_1 &\sim A_2, & A_1 &\sim B_2,\\
B_2 &\sim A_3, & A_2 &\sim B_3,\\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots\\
B_n &\sim A_{n+1}, & A_n &\sim B_{n+1},\\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

以上左边的一列对等关系是通过映射 φ_2 得到的，右边的一列对等关系是通过映射 φ_1 得到的.

考虑复合映射 $\varphi = \varphi_2 \cdot \varphi_1 : A \to A$，则通过映射 φ 知

$$A \sim A_2 \sim A_4 \sim \cdots \sim A_{2n} \sim \cdots,$$

$$A_1 \sim A_3 \sim A_5 \sim \cdots \sim A_{2n+1} \sim \cdots,$$

由 $A_i, B_i (i \in \mathbf{N}, \mathrm{A}_0 = \mathrm{A}, \mathrm{B}_0 = \mathrm{B})$ 的定义显然有

$$A \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots,$$

$$B \supset B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \cdots,$$

将 A 分解为一列互不相交的集合的并

$$
\begin{aligned}
A &= (A - A_1) \cup A_1\\
&= (A - A_1) \cup (A_1 - A_2) \cup A_2\\
&= \cdots\\
&= (A - A_1) \cup (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup \cdots \cup D.
\end{aligned}
$$

其中 $D = A \cap A_1 \cap A_2 \cap \cdots = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$，同样

$$A_1 = (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup (A_3 - A_4) \cup \cdots \cup D_1,$$

其中 $D_1 = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$，易知 $D = D_1$，所以 $D \sim D_1$．

由于 $A \sim A_{2n}, n = 1,2,\cdots, A_1 \sim A_{2n+1} (n = 1,2,\cdots)$，所以

$$A - A_1 \sim A_2 - A_3,$$

$$A_1 - A_2 \sim A_3 - A_4,$$

$$\cdots\cdots$$

$$A_n - A_{n+1} \sim A_{n+2} - A_{n+3},$$

$$\cdots\cdots$$

$\Rightarrow A_{2n-2} - A_{2n-1} \sim A_{2n} - A_{2n+1}, n = 1,2,\cdots$．

而

$$A = D \cup [\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_{2n-1} - A_{2n})] \cup [\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_{2n-2} - A_{2n-1})],$$

$$A_1 = D_1 \cup [\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_{2n-1} - A_{2n})] \cup [\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_{2n} - A_{2n+1})].$$

因为 $A_n - A_{n+1} (n = 1,2,\cdots)$ 是互不相交的集列，所以由定理 1.3.2 知

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_{2n-2} - A_{2n-1}) \sim \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_{2n} - A_{2n+1}),$$

而

$$D \sim D_1, \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_{2n-1} - A_{2n}) \sim \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_{2n-1} - A_{2n}),$$

因此，又由定理 1.3.2 知 $A \sim A_1$，而 $A_1 \sim B$，由对等的传递性，知 $A \sim B$．

如果从基数的观点来看伯恩斯坦定理，它可改述如下：设 A 和 B 是两个集合，如果 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}, \overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{A}}$，那么，$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$．

例 1.3.7　若 $C \subset B \subset A$，且 $A \sim C$，则 $A \sim B \sim C$．

证明　$A \sim C \Rightarrow A$ 与 B 的子集 C 对等，而 B 与 A 的子集 B 对等（自反性）$\Rightarrow$ $A \sim B$（Bernstein 定理）$\Rightarrow B \sim A$（对称性）．

又由 $A \sim C \Rightarrow B \sim C$（传递性），从而 $A \sim B \sim C$．

4. Zermelo[①] 选择公理和 Zorn[②] 引理

很自然地会提出问题:任何两个集合是否必定可以比较它们的基数的大小,即对任给两个集合 A 和 B, 在 $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}},\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}},\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$ 中是否必有一个成立且只有一个成立呢? 从逻辑上讲,对任何两个集合 A 和 B, 必然发生下面四种情况之一:

(1) A 可以对等于 B 的某个子集 B_1, 而 B 不对等于 A 的任何一个子集;

(2) B 可以对等于 A 的某个子集 A_1, 而 A 不对等于 B 的任何一个子集;

(3) B 可以对等于 A 的某个子集 A_1, 而 A 也可以对等于 B 的某个子集 B_1;

(4) A 不对等于 B 的任何一个子集, B 也不对等于 A 的任何一个子集.

情形(1)就是 $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$, 情形(2)就是 $\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$. 由 Bernstein 定理可知,情形(3)就是 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$. 因而,如果能证明情形(4)决不会发生,那么对任何两个集合就可以比较它们的基数的大小了. 遗憾的是,至今尚无法证明情形(4)一定不出现,也无法举出例子说明情形(4)会出现. Zermelo 给集合论加上了一条公理,即 Zermelo 选择公理,依据这条公理就可以证明(4)不会出现,从而任何两个集合的基数都是可以比较大小的.

鉴于 Zermelo 选择公理和与之等价的 Zorn 引理在数学中重要的基础地位和在数学各领域中应用的广泛性,应该对其有必要的了解.

Zermelo 选择公理　设 $F=\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是一族两两不相交的非空集合,则存在集合 L 满足下列条件:

(1) $L\subset\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$;

(2) L 与 F 中每一个集合有且只有一个公共元素.

直观地讲,可以从 F 的每个集合中各自仅取出一个元素来构造一个新的集合 L . 这条公理与后面要介绍的 Zorn 引理是等价的,即,可以由选择公理出发证明 Zorn 引理,也可以由 Zorn 引理出发证明选择公理.

首先让我们对一般的集合引入所谓的序关系。

定义 1.3.7　设 S 是一非空集合,如果在 S 的部分元素之间引进了某种序关

---

① 策梅洛(Zermelo,1871—1953),德国数学家.

② 佐恩(Zorn,1906—1993),德国数学家.

系“ $\leqslant$ ”,满足:

(1) $a \leqslant a(a \in S)$;

(2) 若 $a \leqslant b, b \leqslant c$, 则 $a \leqslant c$;

(3) 若 $a \leqslant b$, 且 $b \leqslant a$,则 $a = b$.

则称$(S, \leqslant)$是一个**偏序集**. 如果对任意 $a, b \in S$,$a \leqslant b$ 与 $b \leqslant a$ 必有一个成立,则称$(S, \leqslant)$为一个**全序集**.

偏序集与全序集的差别在于,偏序集中只有部分元素有序关系,直观地讲,就是可以比较“大小”. 而全序集则是指集合中任意两个元素都可以比较“大小”. 例如,以通常的数的大小关系来定义 $\mathbf{R}$ 中的序关系,则不难看出$(\mathbf{R}, \leqslant)$是一个全序集,这是因为任意两个实数都可以比较大小. 然而,假如在复数域 $\mathbf{C}$ 内定义这种序关系,则$(\mathbf{C}, \leqslant)$是一个偏序集,因为不是任意两个复数都可以比较大小.

定义 1.3.8 设$(S, \leqslant)$是一个偏序集,$A \subset S$,$b \in S$, 若对一切 $x \in A$, 都有 $x \leqslant b$,则称 b 是 A 的一个上界. 如果 $a \in S$, 使得 S 中不存在 x, 使 $a \leqslant x, a \neq x$, 则称 a 是 S 的一个极大元.

Zorn 引理 如果偏序集$(S, \leqslant)$中的任何全序子集在 S 中都有上界,则 S 中一定存在极大元.

Zorn 引理或选择公理是进行数学论证的有力工具,它的作用好比“数学归纳法”,事实上,有人也把它称为“超穷归纳法”. 在泛函分析等后续课程中将会看到它的重要作用.

1.4 可数集合

提到无限集,有两种基数是最常见的,也是最重要的,一是正整数集的基数,记为 a, 另一个是实数集的基数,记为 c . 本节讨论与正整数集对等的那一类集合.

定义 1.4.1 凡和全体正整数所成之集 $\mathbf{N}^+$ 对等的集合都称为可数集合或可列集合.

可数集合是最简单的无穷集,意思是说它是基数最小的无限集,这由下面的定理可以得到说明.

定理 1.4.1 任何无限集合都至少包含一个可数子集.

证明 设 M 是一个无限集,因为 $M\neq\varnothing$,可以从 M 中取一元素,记为 e_1. 由于 M 是无限集,则 $M-\{e_1\}\neq\varnothing$,于是又可以从 $M-\{e_1\}$ 中取一个元素,记为 e_2. 显然 $e_2\in M$,且 $e_1\neq e_2$. 设已从 M 中取出 n 个这样的互异元素 $e_1,e_2,\cdots,e_n$,由于 M 是无限集,故 $M-\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}\neq\varnothing$,于是又可以从 $M-\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 中取一个元素,记为 e_{n+1},显然 $e_{n+1}\in M$ 且与 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 都不相同. 这样,由归纳法,就可以找到 M 的一个无限子集 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots\}$,它是一个可数集合.

定理 1.4.2 可数集合的任何无限子集必为可数集合,从而可数集合的任何子集或者是有限集,或者是可数集.

证明 设 A 是可数集,B^* 是 A 的一个无限子集,那么 $B^*\sim B^*\subset A$,所以 $\overline{\overline{B^*}}\leqslant\overline{\overline{A}}$. 又由于 B^* 是无限集,由定理 1.4.1 可知有可数子集 $B\subset B^*$,这样 $A\sim B\subset B^*$,所以 $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B^*}}$. 由 Bernstein 定理可知 $\overline{\overline{B^*}}=\overline{\overline{A}}$,即 B^* 也是可数集.

以后为叙述方便,有限集和可数集一起称为**至多可数集**.

由可数集的定义,一个集合 A 是可数集,当且仅当 A 的元素能排列成无穷序列 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$ ($i\neq j$ 时 $a_i\neq a_j$)的形式.

定理 1.4.3 设 A 为可数集,B 为至多可数集,则 $A\cup B$ 为可数集.

证明 (1) 先设 $A\cap B=\varnothing$,因为 A 是可数集,设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$,若 B 是有限集,设 $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_k\}$,此时

$$\begin{aligned}A\cup B&=\{b_1,b_2,\cdots,b_k,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}\\&=\{b_1,b_2,\cdots,b_k,b_{k+1},b_{k+2},\cdots,b_{k+n},\cdots\},\end{aligned}$$

其中 $b_{k+n}=a_n(n=1,2,\cdots)$. 这是一个可数集.

若 B 是无限集,设 $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots\}$,此时,

$$\begin{aligned}A\cup B&=\{a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3,\cdots,a_n,b_n,\cdots\}\\&=\{c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6,\cdots,c_{2k-1},c_{2k},\cdots\},\end{aligned}$$

其中 $c_{2k-1}=a_k,c_{2k}=b_k(k=1,2,\cdots)$,这是一个可数集.

(2) 一般情形,即 $A\cap B\neq\varnothing$,此时,令 $B^*=B-A$,则 $A\cup B=A\cup B^*$,并且 $A\cap B^*=\varnothing$,因为 $B^*\subset B$,B 是至多可数集,因而 B^* 是至多可数集. 由(1)可知,$A\cup B^*$ 是可数集,于是 $A\cup B$ 是可数集.

推论 1 有限个至多可数集 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的并集 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 是至多可数集，但如果至少有一个 $A_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 是可数集，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 必是可数集.

为了证明可数多个可数集的并集还是可数集这一事实，我们给出一列集合的并集表示为互不相交的一列集的并集的方法，这一结果以例题的形式给出.

例 1.4.1 设 $\{A_n\}$ 是一列集合，设 $B_1=A_1, B_i=A_i-(\bigcup\limits_{j=1}^{i-1} A_j)(i\geqslant 2)$，则 $B_i\cap B_j=\varnothing\,(i\neq j)$，且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i=\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i(1\leqslant n\leqslant+\infty)$.

证明 对任意的 $m,n\in \mathbf{N}^+$，不妨设 $m>n$，则 $B_n\subset A_n\subset\bigcup\limits_{i=1}^{m-1} A_i(m-1\geqslant n)$，而

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i\cap B_m&=\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i\cap(A_m-\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i)\\&=\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i\cap[A_m\cap C(\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i)]\\&=\varnothing,\end{aligned}$$

所以 $B_n\cap B_m=\varnothing\,(n\neq m)$，因此 $\{B_n\}$ 是互不相交的集列.

下证 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i=\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i(1\leqslant n\leqslant+\infty)$.

若 $x\in\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$，则

$$x\in B_{i_0}(1\leqslant i_0<+\infty)\Rightarrow x\in A_{i_0}\Rightarrow x\in\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Rightarrow\bigcup_{i=1}^{n}B_i\subset\bigcup_{i=1}^{n}A_i\ (1\leqslant n\leqslant+\infty);$$

若 $x\in\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$，则 x 包含在一些 A_{n_i} 中 $(1\leqslant n_i<+\infty)$.

设 n_0 是这些 n_i 中的最小者，若 $n_0=1$，则 $x\in A_1=B_1\Rightarrow x\in\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$.

若 $n_0>1$，则 $x\bar{\in}\bigcup\limits_{i=1}^{n_0-1} A_i$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow x\in A_{n_0}-\bigcup_{i=1}^{n_0-1} A_i=B_{n_0}\\&\Rightarrow x\in\bigcup_{i=1}^{n} B_i\\&\Rightarrow\bigcup_{i=1}^{n} A_i\subset\bigcup_{i=1}^{n} B_i(1\leqslant n\leqslant+\infty).\end{aligned}$$

综上，$\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i=\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i(1\leqslant n\leqslant+\infty)$.

定理 1.4.4 设 $A_i(i=1,2,\cdots)$ 都是至多可数集，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 是可数集.

证明 (1) 先设 $A_i \cap A_j = \varnothing(i \neq j)$，设

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, \cdots\}, \\
A_2 &= \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{25}, \cdots\}, \\
A_3 &= \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, a_{35}, \cdots\}, \\
A_4 &= \{a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}, a_{45}, \cdots\}, \\
A_5 &= \{a_{51}, a_{52}, a_{53}, a_{54}, a_{55}, \cdots\}, \\
&\cdots\cdots\ \cdots\cdots\ \cdots\cdots\ \cdots\cdots\ \cdots\cdots.
\end{aligned}
$$

称 $p+q=h$ 为元素 $a_{pq}(p,q=1,2,\cdots)$ 的高度，按高度从小到大编号，在同一高度中按 q 值由小到大编号，这样就可以把并集 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 中所有的元素排成一列：

$$a_{11};a_{21},a_{12};a_{31},a_{22},a_{13};\cdots;a_{n1}a_{n-1,2},a_{n-2,3},\cdots,a_{1n};\cdots,$$

因此，$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 是可数集.

(2) 一般情形，令 $A_1^* = A_1, A_i^* = A_i - \bigcup\limits_{j=1}^{i-1} A_j(i \geqslant 2)$，则由例 1.4.1 可知，$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i^*$ 且 $A_i^* \cap A_j^* = \varnothing(i \neq j)$.

现在各 A_i^* 都是至多可数集，若这些 A_i^* 中只有有限个不为空集，则由定理 1.4.3 之的推论 1 可知 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i^*$ 是可数集(因为 $A_1^* = A_1$ 是可数集).

如果有无限多个 A_i^* 不为空集，这时，也就是有可数多个 A_i^* 是至多可数集，由情形(1)可知 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i^*$ 是可数集.

定理 1.4.5 有理数全体是一个可数集.

证明 我们用 $\mathbf{Q}^+$ 和 $\mathbf{Q}^-$ 分别表示正有理数集和负有理数集.

设 $A_m = \left\{\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \cdots, \frac{n}{m}, \cdots\right\}(m=1,2,\cdots)$，则 A_m 是可数集，而 $\mathbf{Q}^+ = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m$，由定理 1.4.4 可知 $\mathbf{Q}^+$ 是可数集. 而 $\mathbf{Q}^+ \sim \mathbf{Q}^-$ ($\mathbf{Q}^+ \xrightarrow[\varphi(r)=-r]{\text{一一对应}} \mathbf{Q}^-$)，因而，$\mathbf{Q}^-$ 是可数集. 因此 $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^+ \cup \mathbf{Q}^- \cup \{0\}$ 是可数集(定理1.4.3推论 1).

定理 1.4.6 若 A 中每个元素可由 n 个互相独立的记号一对一地加以决定，

各记号跑遍一个可数集，即 $A=\{a_{x_1,x_2,\cdots,x_n}\}$，$x_k\in I_k$，$I_k$ 是可数集，$k=1,2,\cdots,n$（$x_k=x_k^{(1)},x_k^{(2)},\cdots,x_k^{(j)},\cdots$；$k=1,2,\cdots,n$；$j=1,2,\cdots$）则 A 是可数集.

证明 用数学归纳法，当 $n=1$ 时，即 A 中元素只由一个记号决定，设 $A=\{a_{x_1^{(1)}},a_{x_1^{(2)}},\cdots,a_{x_1^{(j)}},\cdots\}$，这是一个可数集.

设 $n=m$ 时定理成立，则当 $n=m+1$ 时，设 $A=\{a_{x_1,x_2,\cdots,x_m,x_{m+1}}\}$，又设 A 中满足 $x_{m+1}=x_{m+1}^{(j)}$ 的元素全体为 A_j，则 $A_j=\{a_{x_1,x_2,\cdots,x_m,x_{m+1}^{(j)}}\}(j=1,2,\cdots)$.

因为 A_j 中每个元素的第 $m+1$ 个记号已经明确固定下来，所以 A_j 中每个元素只由 m 个互相独立的记号一对一地加以决定，因而由归纳法假设，A_j 是可数集（$j=1,2,\cdots$），而 $A=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}A_j$，由定理 1.4.4 可知 A 是可数集.

例 1.4.2 由平面上坐标为有理数的点的全体所组成的集合为一个可数集.

证明 设该集合为 A，平面上坐标为有理数的点的形式为 (ξ_1,ξ_2)，其中 ξ_1 和 ξ_2 互相独立，各自跑遍有理数集 $\mathbf{Q}$. 于是 A 中每个元素由两个互相独立的记号一对一地加以决定，且各记号跑遍一个可数集. 因此，由定理 1.4.6 可知，A 是可数集.

例 1.4.3 设 $A=\{(n_1,n_2,\cdots,n_k)\mid n_i\in\mathbf{N}^+,1\leqslant i\leqslant k\}$，则 A 是可数集.

证明 A 中每个元素 $(n_1,n_2,\cdots,n_k)$ 由 k 个互相独立的记号一对一地加以决定，各记号跑遍一个可数集 $\mathbf{N}^+$，由定理 1.4.6 可知 A 是可数集.

例 1.4.4 有理系数多项式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 的全体是一个可数集.

证明 对于每个 $n\in\mathbf{N}$，把 n 次有理系数多项式全体记为 A_n，则 A_n 中每一个元素 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 由 $n+1$ 个互相独立的记号一对一地加以决定，每一个记号跑遍一个可数集 $\mathbf{Q}$，由定理 1.4.6 可知 A_n 是可数集. 而有理系数多项式的全体所组成的集合是 $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}A_n$，由定理 1.4.4 可知，$\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}A_n$ 是可数集.

同理可证，整系数多项式的全体是一个可数集，进而代数数（整系数多项式的根）的全体是一个可数集.

例 1.4.5 凡无限集必与它的一个真子集对等.

证明 设 A 是无限集，则由定理 1.4.1 可知 A 存在一个可数子集 $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}^+}$，令 $B=A-\{a_1\}$，则 B 是 A 的真子集. 作映射

$$\varphi: A \to B,$$

且

$$\varphi(a) = \begin{cases} a, & a \in A - \{a_n\}_{n\in \mathbf{N}^+}; \\ a_{k+1}, & a \in \{a_n\}_{n\in \mathbf{N}^+}, \text{且 } a = a_k (k = 1,2,\cdots). \end{cases}$$

则 φ 是 A 与 B 之间的一一对应，因而 A 与它的一个真子集 B 对等.

1.5 连续基数

在上一节提到在无限集中有两种基数是最常见且最重要的，那就是正整数集 $\mathbf{N}^+$ 的基数 a 和实数集 $\mathbf{R}$ 的基数 c，一般地称 a 为可数基数，c 为连续基数. 对于可数基数，我们已经作了比较详尽的讨论. 本节讨论连续基数 c.

在无限集中，有没有不是可数集的无限集，如果没有，那么所有的无限集都是可数集，这种讨论就没有必要了. 事实上，不但有不是可数集的无限集，而且对于无限集来说，不存在最大的基数.

我们将不是可数集合的无限集合称为不可数集合，将与实数集 $\mathbf{R}$ 对等的那一类集合称为具有连续基数的集合.

定理 1.5.1 全体实数所组成的集合 $\mathbf{R}$ 是一个不可数集合.

证明 由例 1.3.4 可知 $(0,1)$ 与 $\mathbf{R}$ 对等，因而，只须证明 $(0,1)$ 是不可数集就可以了.

对于每一个 $a \in (0,1)$，都可以唯一地表示为 10 进位无限小数

$$a = 0.a_1a_2a_3a_4a_5\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \tag{1.5.1}$$

的形式. 其中 a_n 是 $0,1,\cdots,9$ 中的一个数字，且不以 0 为循环节，称 $(0,1)$ 中实数的这种表示为正规表示. 反之，每一个如式(1.5.1)表示的无限小数都是 $(0,1)$ 中某一实数的正规表示(如 0.57 的正规表示为 0.56999…).

以下用反证法证明. 如果 $(0,1)$ 中的实数全体是可数集，即 $(0,1) = \{a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, \cdots\}$.

将每个 $a^{(n)}$ 表示成正规的无限小数：

$$a^{(1)} = 0.a_1^{(1)}a_2^{(1)}a_3^{(1)}\cdots,$$
$$a^{(2)} = 0.a_1^{(2)}a_2^{(2)}a_3^{(2)}\cdots,$$
$$a^{(3)} = 0.a_1^{(3)}a_2^{(3)}a_3^{(3)}\cdots,$$
$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots.$$

现在设法在 $(0,1)$ 中找出一个与 $\{a^{(1)},a^{(2)},a^{(3)},\cdots\}$ 中所有的实数都不同的实数.

考察对角线上的数字 $a_n^{(n)}(n=1,2,\cdots)$. 作一个无限小数如下：$a=0.a_1a_2a_3\cdots$，其中

$$a_n = \begin{cases} 1, & 若\ a_n^{(n)} \neq 1; \\ 2, & 若\ a_n^{(n)} = 1. \end{cases}$$

这个无限小数是 $(0,1)$ 中某一实数的正规表示，它与 $\{a^{(1)},a^{(2)},a^{(3)},\cdots\}$ 中的每一个 $a^{(n)}(n=1,2,\cdots)$ 的正规表示都不相同，即 $a \neq a^{(n)}(n=1,2,\cdots)$. 从而 $(0,1) \neq \{a^{(1)},a^{(2)},a^{(3)},\cdots\}$，与假设矛盾. 因此 $(0,1)$ 是不可数集，因而 $\mathbf{R}$ 是不可数集.

推论 1 $c > a$.

定理 1.5.2 任意区间 (a,b)，$[a,b)$，$(a,b]$，$[a,b]$，$(a,+\infty)$，$[a,+\infty)$，$(-\infty,a)$，$(-\infty,a]$ 均具有连续基数 $c(a<b)$.

证明 作映射 $\varphi:(a,b)\to(0,1)$，对任意的 $x\in(a,b)$，令 $\varphi(x)=\dfrac{x-a}{b-a}$，则 φ 是 (a,b) 到 $(0,1)$ 的一一对应. 所以 $(a,b)\sim(0,1)\sim\mathbf{R}$. 对于其他的区间可用如下的方法证明，以 $(a,+\infty)$ 为例.

因为 $(a,b)\subset(a,+\infty)\subset\mathbf{R}$，而 $(a,b)\sim\mathbf{R}$. 由例 1.3.7 知 $(a,+\infty)\sim\mathbf{R}$.

定理 1.5.3 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是一列互不相交的集合，它们的基数都是 c，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 的基数也是 c.

证明 设 $I_n=[n-1,n)$，则 $I_n\cap I_m=\varnothing(m\neq n)$，而 $\overline{\overline{I}}_n=c(n=1,2,\cdots)$，所以 $I_n\sim A_n(n=1,2,\cdots)$. 从而 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\sim\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}I_n=[0,+\infty)$，而 $\overline{\overline{[0,+\infty)}}=c$，因此 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 的基数是 c.

定理 1.5.4 实数列全体 E^∞ 的基数是 c.

证明 记 B 为 E^∞ 中适合 $0<x_n<1(n=1,2,\cdots)$ 的点 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$ 的全体. 设 $x\in B, x=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$, 其中 x_n 是实数. 作映射 φ:

$$\varphi(x)=\left\{\tan\left(x_1-\frac{1}{2}\right)\pi,\tan\left(x_2-\frac{1}{2}\right)\pi,\cdots,\tan\left(x_n-\frac{1}{2}\right)\pi,\cdots\right\},$$

则 φ 是 B 到 E^∞ 的一一对应,所以 $\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{E^\infty}}$. 我们只须证明 B 的基数是 c.

事实上,将 $(0,1)$ 中每个 x 与 B 中的点 $\bar{x}=\{x,x,\cdots\}$ 对应,就能知道 $(0,1)$ 对等于 B 的一个子集. 即 $\overline{\overline{B}}\geqslant\overline{\overline{(0,1)}}=c$.

反之,对 B 中的任何 $x=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$, 按 10 进位无限小数正规表示 $x_n(n=1,2,\cdots)$, 有

$$\begin{aligned}
x_1&=0.x_{11}x_{12}\cdots x_{1n}\cdots,\\
x_2&=0.x_{21}x_{22}\cdots x_{2n}\cdots,\\
&\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\\
x_n&=0.x_{n1}x_{n2}\cdots x_{nn}\cdots,\\
&\cdots\cdots\quad\cdots\cdots.
\end{aligned}$$

由 $x=\{x_n\}\in B$, 作小数 $\psi(x)$:

$$\psi(x)=0.x_{11}x_{21}x_{12}\cdots x_{n1}x_{n-1,2}\cdots x_{1n}\cdots,$$

显然 $\psi(x)\in(0,1)$, 而且当 $x\neq y$ 时, $\psi(x)\neq\psi(y)$, 所以由映射 ψ, B 也对等于 $(0,1)$ 的一个子集,从而 $\overline{\overline{B}}\leqslant\overline{\overline{(0,1)}}=c$. 由 Bernstein 定理可知, $\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{(0,1)}}$, 因此 $\overline{\overline{E^\infty}}=c$.

定理 1.5.5 n 维欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 的基数为 c.

证明 将 $\mathbf{R}^n$ 中的点 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 对应于 E^∞ 中的点 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n,0,0,\cdots\}$, 则 $\mathbf{R}^n$ 对等于 E^∞ 的一个子集,即 $\overline{\overline{\mathbf{R}^n}}\leqslant\overline{\overline{E^\infty}}=c$. 再将 $\mathbf{R}$ 中的点 x 对应于 $\mathbf{R}^n$ 中的点 $(x,0,\cdots,0)$, 则 $\mathbf{R}$ 对等于 $\mathbf{R}^n$ 的一个子集,即 $c=\overline{\overline{\mathbf{R}}}\leqslant\overline{\overline{\mathbf{R}^n}}$. 由此 $\overline{\overline{\mathbf{R}^n}}=c$.

定理 1.5.6 $[a,b]$ 上的连续函数全体 $C[a,b]$ 的基数是 c.

证明 由于常数函数属于 $C[a,b]$, 而 $[a,b]$ 上的常数函数全体 $K\sim\mathbf{R}$, 因此 $\overline{\overline{K}}=c$. 由于 $\overline{\overline{E^\infty}}=c$, 所以 E^∞ 与 $C[a,b]$ 的子集 K 对等. 下面证明 $C[a,b]$ 与 E^∞ 的一个子集对等.

我们把 $[a,b]$ 中的有理数全体排成一列,记为 $r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots$, 任何一个连续

函数 $f(x) \in C[a,b]$，由它在 $r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$ 上的值 $f(r_1), f(r_2), \cdots, f(r_n), \cdots$ 完全决定. 事实上，因为对于任何 $x \in [a,b]$，存在上述有理数列的子数列 $r_{n_i} \to x(i \to \infty)$. 由于 f 的连续性，$f(x) = \lim\limits_{i\to\infty} f(r_{n_i})$. 因此 $C[a,b]$ 到 E^∞ 中的映射 φ: $f \to \{f(r_1), f(r_2), \cdots, f(r_n), \cdots\}$ 是 $C[a,b]$ 到 E^∞ 的一个子集 $\varphi(C[a,b])$ 的一一对应，即 $C[a,b]$ 与 E^∞ 的某个子集对等. 于是 $\overline{\overline{C[a,b]}} = c$.

基数的大小既然可以比较，是否存在最大的基数呢？下面的定理回答了这个问题，即没有最大的基数.

定理 1.5.7 设 M 是任意一个集合，它的所有子集所构成的集合为 $P(M)$，则 $\overline{\overline{P(M)}} > \overline{\overline{M}}$.

证明 首先证明 M 与 $P(M)$ 不对等. 若不然，$M \sim P(M)$，则对于每个 $a \in M$，都有 $P(M)$ 中一元素即 M 的一个子集 M_a 与之对应. 作集合 $M^* = \{a \mid a \in M$ 但 $a \overline{\in} M_a\}$，则 $M^* \subset M \Rightarrow M^* \in P(M)$，从而应有 M 中元素 a^* 与之对应. 若 $a^* \in M^*$，则由 M^* 之定义，应有 $a^* \overline{\in} M^*$，矛盾. 若 $a^* \overline{\in} M^*$，由 M^* 的定义，应有 $a^* \in M^*$，矛盾. 从而，M 与 $P(M)$ 不对等.

其次，证明 M 对等于 $P(M)$ 的一个子集. 对每一个 $a \in M$，使 a 对应于 $\{a\} \in P(M)$，则 M 与 $P(M)$ 的一个子集 $M_1 = \{\{x\} \mid x \in M\}$ 对等.

综上，由定义可知 $\overline{\overline{P(M)}} > \overline{\overline{M}}$.

例 1.5.1 设 A 和 B 是两个集合，如果 $\overline{\overline{A \cup B}} = c$，则 $\overline{\overline{A}} = c$ 或 $\overline{\overline{B}} = c$.

证明 由于 $\overline{\overline{\mathbf{R}^2}} = c$，所以不妨设 $A \cup B = \mathbf{R}^2$.

因为 $A \subset A \cup B, B \subset A \cup B$，所以 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{A \cup B}} = c, \overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{A \cup B}} = c$.

令

$$A^* = \{x \in \mathbf{R} \mid \text{存在 } y \in \mathbf{R}, \text{使 } (x,y) \in A\},$$
$$B_* = \{y \in \mathbf{R} \mid \text{存在 } x \in \mathbf{R}, \text{使 } (x,y) \in B\}.$$

则 $A^* \subset \mathbf{R}, B_* \subset \mathbf{R}$.

如果 $\overline{\overline{A}} < c$ 且 $\overline{\overline{B}} < c$，则 $A^* \neq \mathbf{R}$ 且 $B_* \neq \mathbf{R}$，如若不然，则 A 或 B 有一个基数为 c 的子集. 这与 $\overline{\overline{A}} < c$ 且 $\overline{\overline{B}} < c$ 矛盾.

取 $\xi \in \mathbf{R} - A^*, \eta \in \mathbf{R} - B_*$，则 $(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^2 = A \cup B$.

另一方面，由 $\xi \overline{\in} A^*$ 可知 $(\xi, \eta) \overline{\in} A$，由 $\eta \overline{\in} B_*$ 可知 $(\xi, \eta) \overline{\in} B$. 这样 $(\xi,$

$\eta) \in A \cup B$. 矛盾. 因此 $\overline{\overline{A}} = c$ 或 $\overline{\overline{B}} = c$.

例 1.5.2 设 A 是可数集合,则 A 的所有有限子集组成的集合 A^* 亦必可数.

证明 设 $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$, A_k 是 A 的含有 k 个元素的子集全体. 若 $x \in A_k$, 则 $x = \{x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}\}$, $x_{n_i} \in A (1 \leqslant i \leqslant k)$. 即 A_k 中元素 $\{x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}\}$ 由 k 个互相独立的记号一对一地加以决定,且每个记号跑遍一个可数集.

事实上,

x_{n_1} 跑遍可数集 A,

x_{n_2} 跑遍可数集 $A - \{x_{n_1}\}$,

…… ……

x_{n_k} 跑遍可数集 $A - \{x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_{k-1}}\}$.

所以, A_k 为可数集($k = 1, 2, \cdots$).

这样 A 的所有有限子集组成的集合 $A^* = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} A_k (A_0 = \varnothing)$ 是可数集.

例 1.5.3 $2^a = c$, 其中 a 是可数基数, c 是连续基数.

证明 2^a 表示一个可数集的所有子集构成的集合的基数. 考虑正整数集 $\mathbf{N}^+$, 因为 $2^a = \overline{\overline{P(\mathbf{N}^+)}}$, 所以只须证明 $\overline{\overline{P(\mathbf{N}^+)}} = c$.

设 A_0 是 $\mathbf{N}^+$ 的所有有限子集全体, A_∞ 是 $\mathbf{N}^+$ 的所有无限子集全体. 则

$$P(\mathbf{N}^+) = A_0 \cup A_\infty, A_0 \cap A_\infty = \varnothing.$$

对任意的 $B \in A_\infty$, 令 $\varphi(B) = \sum\limits_{k \in B} \dfrac{1}{2^k}$, 则 φ 是从 A_∞ 到 $(0,1]$ 上的一个一一对应, 所以 $\overline{\overline{A_\infty}} = c$, 而 $\overline{\overline{A}}_0 = a$, 因此 $\overline{\overline{P(\mathbf{N}^+)}} = c$, 这样 $2^a = c$.

到此,我们讨论了两个重要的无限基数 a 和 c. 有一个很有趣的问题,是否存在这样的集合 A, 其基数位于 a 和 c 之间,即 $a < \overline{\overline{A}} < c$. Cantor(康托)首先考虑了这个问题,他猜测,没有这个中间基数,这就是著名的 Cantor 连续统假设. 严格说来,至今没有人能够证明是否存在这种基数,但人们普遍承认这一假设,并将此作为集合论的一条公理. 已经证明,这条公理与集合论的其他公理是互相独立的.

习　题

1. 设 $A = \{a, b, c\}$, 求 $P(A)$.

2. 若 $E=[0,2\pi]$，$f(x)=\sin x$，求 $E[f=0]$，$E[f>0]$，$E[f<0]$.

3. 设 $F_n=[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}]$，求 $\bigcup_{n=3}^{\infty}F_n$ 和 $\bigcap_{n=3}^{\infty}F_n$.

4. 设 A，E 是任意两个集合，则 $A=(A\cap E)\cup(A\cap CE)$.

5. (1) 证明 $\{x\mid x>0\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\mid x>\frac{1}{n}\}$；

(2) 求 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x\mid x>\frac{1}{n}\}$.

6. 设 $f:A\to B$，$A_0\subset A$，$B_0\subset B$，证明：

(1) 若 f 是 A 到 B 的单射，则 $f^{-1}(f(A_0))=A_0$；

(2) 若 f 是 A 到 B 的满射，则 $f(f^{-1}(B_0))=B_0$.

7. 设 $A_{2n-1}=(0,\frac{1}{n})$，$A_{2n}=(0,n)(n=1,2,\cdots)$，求出集列 $\{A_n\}$ 的上限集和下限集.

8. 证明：由直线上互不相交的开区间作为集 A 的元素，则 A 为至多可数集.

9. 证明：单调增加函数的不连续点最多只有可数多个.

10. 试找出使 $(0,1)$ 和 $[0,1]$ 之间一一对应的一种方法.

11. 证明：$[0,1]$ 上全体无理数组成的集合基数为 c.

12. 设 $\{f_n(x)\}$ 是区间 $E=[a,b]$ 上的实函数列 $f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots$，又设 $\{f_n(x)\}$ 具有极限函数 $f(x)$，证明对任何实数 c 有：

(1) $E[f>c]=\bigcup_{n=1}^{\infty}E[f_n>c]$；

(2) $E[f\leqslant c]=\bigcap_{n=1}^{\infty}E[f_n\leqslant c]$.

13. 设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 E 上的实函数列，$g(x)=\sup_n\{f_n(x)\}$，$h(x)=\inf_n\{f_n(x)\}$，证明对任何实数 a 有：

(1) $E[g>a]=\bigcup_{n=1}^{\infty}E[f_n>a]$；

(2) $E[g\leqslant a]=\bigcap_{n=1}^{\infty}E[f_n\leqslant a]$；

(3) $E[h<a]=\bigcap_{n=1}^{\infty}E[f_n<a]$；

(4) $E[h\geqslant a]=\bigcap_{n=1}^{\infty}E[f_n\geqslant a]$.

14. 设 $f(x)$ 是定义在集 E 上的函数，a 是任意实数，证明：

(1) $E[f \geqslant a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} E[f > a - \frac{1}{n}]$；

(2) $E[f < a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E[f \leqslant a - \frac{1}{n}]$.

15. 记每项取值为 0 或 1 的数列全体所成的集合为 T，即 $T = \{\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\} \mid a_n = 0$ 或 $1, n \in \mathbf{N}^+\}$，则 T 的基数是 c .

16. 设 $f(x)$ 具有如下特性：对一个 x_0，有正数 δ 与之对应，当 $|x - x_0| < \delta$ 时，$f(x) \geqslant f(x_0)$，那么 $f(x)$ 的函数值的全体是至多可数集.

第2章　点　集

在第1章里，我们介绍了集合的基本知识，给出了一些重要概念和基本性质。而实变函数课程研究的函数是定义在 n 维欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 的子集上的实值函数，因此，有必要对 $\mathbf{R}^n$ 中的点集作进一步的讨论。本章在第1章的基础上，着重讨论 $\mathbf{R}^n$ 中的点集所特有的一些性质。需要指出的是，因为 $\mathbf{R}^n$ 中点集也是集合，因而，第1章中关于一般的集合的所有结果对 $\mathbf{R}^n$ 中的点集都适用，但 $\mathbf{R}^n$ 中的点集所具有的许多特殊性质，对于一般的集合就不一定成立了。

2.1　n 维欧几里得空间

在解析几何和数学分析中，我们已经对一维欧几里得空间 $\mathbf{R}^1$（即 $\mathbf{R}$，实直线），二维欧几里得空间 $\mathbf{R}^2$（即实平面）和三维欧几里得空间 $\mathbf{R}^3$（即现实的三维立体空间）有了比较深入的了解。现在，我们讨论 n 维欧几里得空间。

定义 2.1.1　设 n 是正整数，由 n 个实数构成的有序数组 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的全体组成的集合，称为 n 维点集，记作 $\mathbf{R}^n$，即 $\mathbf{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \cdots, n\}$。

为了深入研究 n 维点集 $\mathbf{R}^n$ 中邻域、有界集、点列收敛等概念，需要对 $\mathbf{R}^n$ 中的点之间定义距离。为了使问题讨论适用于更广泛的情形，我们对一般的集合给出距离的概念。

定义 2.1.2　设 X 是一个非空集合，如果对于 X 中任何两个元素 x 和 y，都有一个确定的实数，记为 $\rho(x,y)$，与之对应，且满足下面三个条件，则称 ρ 是 X 上的一个距离，称 $\rho(x,y)$ 是 x 和 y 之间的距离，而称 X 是以 ρ 为距离的距离空间（或度

量空间). 记为 (X,ρ) . 这三个条件是:

(1) 非负性, $\rho(x,y)\geqslant 0$, 而且 $\rho(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

(2) 对称性, $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

(3) 三角不等式, $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$, 这里 z 也是 X 中的任意一个元素.

对于 $\mathbf{R}^n$ 中的任意两点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$, 定义实函数 $\rho(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$, 则 $\rho(x,y)$ 满足距离的三个条件(1),(2),(3). 称 ρ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的欧几里得距离,称 $(\mathbf{R}^n,\rho)$ 为 n 维欧几里得空间.

定义 2.1.3 设 $P_0\in\mathbf{R}^n$ 是一固定点, $\delta>0$ 为一实数,则集合 $\{P\mid\rho(P,P_0)<\delta\}$ 称为以 P_0 为中心的 δ 邻域,记作 $U(P_0,\delta)$.

P_0 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径,某邻域当不需要指出半径时,可以简单地说是 P_0 的某邻域,记作 $U(P_0)$, 显然,在 $\mathbf{R},\mathbf{R}^2,\mathbf{R}^3$ 中的邻域 $U(P_0,\delta)$, 就分别是以 P_0 为中心以 δ 为半径的开区间、开圆和开球.

容易证明邻域具有如下基本性质:

(1) 对于 $Q\in U(P)$, 存在 $U(Q)\subset U(P)$;

(2) 对于 $P\neq Q$, 存在 $U(P)$ 和 $U(Q)$, 使 $U(P)\cap U(Q)=\varnothing$.

定义 2.1.4 设 $\{P_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个点列, $P_0\in\mathbf{R}^n$, 如果当 $k\to\infty$ 时,有 $\rho(P_k,P_0)\to 0$, 则称点列 $\{P_k\}$ 收敛于 P_0, 记为 $\lim\limits_{k\to\infty}P_k=P_0$ 或 $P_k\to P_0(k\to\infty)$.

用邻域的语言来说,就是: $\lim\limits_{k\to\infty}P_k=P_0\Leftrightarrow$ 对 P_0 的任意邻域 $U(P_0)$, 存在 $K\in\mathbf{N}^+$, 使当 $k>K$ 时, $P_k\in U(P_0)$.

用" $\varepsilon-N$ "语言来说,就是: $\lim\limits_{k\to\infty}P_k=P_0\Leftrightarrow$ 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $K\in\mathbf{N}^+$, 使当 $k>K$ 时, $\rho(P_k,P_0)<\varepsilon$.

定义 2.1.5 设 A,B 是两个非空点集, A 与 B 的距离定义为

$$\rho(A,B)=\inf_{\substack{P\in A\\Q\in B}}\rho(P,Q).$$

定义 2.1.6 设 A 是非空点集, A 的直径定义为 $\delta(A)=\sup\limits_{\substack{P\in A\\Q\in A}}\rho(P,Q)$.

定义 2.1.7 设 E 为 $\mathbf{R}^n$ 中一点集,如果 $\delta(E)<\infty$, 则称 E 为有界点集(空集

也作为有界点集).

显然,E 是有界集$\Leftrightarrow$存在常数 M,使对任意的 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in E$,都有 $|x_i|\leqslant M(i=1,2,\cdots,n)$.

E 是有界集$\Leftrightarrow$存在常数 K,使对任意的 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in E$,有$\rho(x,O)\leqslant K$,其中 $O=(0,0,\cdots,0)$为 $\mathbf{R}^n$ 的原点.

定义 2.1.8 点集 $\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid a_i<x_i<b_i,i=1,2,\cdots,n\}$ 称为 $\mathbf{R}^n$ 中的开区间;如果把其中的不等式都改为 $a_i\leqslant x_i\leqslant b_i(i=1,2,\cdots,n)$,则称为 $\mathbf{R}^n$ 中的闭区间;如果把不等式都改为 $a_i<x_i\leqslant b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 或 $a_i\leqslant x_i<b_i(i=1,2,\cdots,n)$,则称为 $\mathbf{R}^n$ 中的左开右闭区间或左闭右开区间.当没有必要区分上述各种区间时,统称为区间,记作 I, $b_i-a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 称为 I 的第 i 个"边长",区间 I 的体积,记为$|I|$, $|I|=\prod\limits_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$.

2.2 内点和内部、聚点和导集、界点和边界

对于 $\mathbf{R}^n$ 中的点集 E 和 $\mathbf{R}^n$ 中的点 P_0,研究 P_0 相对于 E 的位置关系,有以下三种情况:

(1) P_0 附近根本没有 E 的点;

(2) P_0 附近都是 E 的点;

(3) P_0 附近既有属于 E 的点也有不属于 E 的点.

针对这三种情况,用邻域概念给出如下定义.

定义 2.2.1 设 $E\subset\mathbf{R}^n,P_0\in\mathbf{R}^n$.

(1) 若存在某一 $\delta_0>0$,使 $U(P_0,\delta_0)\subset CE$ (或 $U(P_0,\delta_0)\cap E=\varnothing$),则称 P_0 为 E 的**外点**.

(2) 若存在某一 $\delta_0>0$,使 $U(P_0,\delta_0)\subset E$,则称 P_0 为 E 的**内点**.

(3) 若对任何 $\delta_0>0$,总有 $U(P_0,\delta_0)\cap E\neq\varnothing$ 且 $U(P_0,\delta_0)\cap CE\neq\varnothing$,则称 P_0 为 E 的**界点**.

从定义可以知道,E 的内点属于 E,E 的外点不属于 E,E 的界点可以属于 E,也可以不属于 E ;E 的外点也是 CE 的内点;E 的界点也是 CE 的界点.

如果考虑在点 P_0 的附近是否总是"凝聚着"点集 E 的点，又可以定义两种类型的点.

定义 2.2.2 设 $E \subset \mathbf{R}^n, P_0 \in \mathbf{R}^n$.

(1) 若对任何 $\delta > 0$，P_0 的 δ 邻域 $U(P_0,\delta)$ 中都含有 E 中的无穷多个点，也就是说 $U(P_0,\delta) \cap E$ 是 E 的无穷子集，则称 P_0 为 E 的一个**聚点**.

(2) 若 $P_0 \in E$，但 P_0 不是 E 的聚点，也就是说，存在某一 $\delta_0 > 0$，使 $U(P_0,\delta_0) \cap E = \{P_0\}$，则称 P_0 为 E 的一个**孤立点**.

应当注意，E 的孤立点必属于 E，但 E 的聚点可以属于 E，也可以不属于 E.

从定义可以看出，E 的内点必为 E 的聚点，E 的孤立点必为 E 的界点. 反过来却未必成立.

定理 2.2.1 设 $E \subset \mathbf{R}^n, P_0 \in \mathbf{R}^n$，则下面三个命题是等价的：

(1) P_0 是 E 的聚点；

(2) 对任何 $\delta > 0$，在 $U(P_0,\delta)$ 内至少含有一个属于 E 而异于 P_0 的点；

(3) 存在一个各点互异的点列 $\{P_n\}$，使 $P_n \to P_0 (n \to \infty)$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2)，设 P_0 是 E 的聚点，则对任何 $\delta > 0$，$U(P_0,\delta)$ 内都含有 E 中的无穷多个点，因此，在 $U(P_0,\delta)$ 内至少含有一个属于 E 而异于 P_0 的点.

(2) $\Rightarrow$ (3)，设(2)成立，则在 $U(P_0,1)$ 内有一个点 $P_1 \in E$ 而异于 P_0，令 $\delta_1 = \min\{\rho(P_1,P_0),\frac{1}{2}\}$，那么在 $U(P_0,\delta_1)$ 内有一个点 $P_2 \in E$ 而异于 P_0，由 δ_1 的定义可知 P_2 异于 P_1，令 $\delta_2 = \min\{\rho(P_2,P_0),\frac{1}{3}\}$，同样，在 $U(P_0,\delta_2)$ 内有一个点 $P_3 \in E$ 而异于 P_0，且 P_3 与 P_2 和 P_1 都不同. 这样继续下去，得到一个互异点列 $\{P_n\}$，满足 $\rho(P_n,P_0) < \frac{1}{n} \to 0 (n \to \infty)$.

(3) $\Rightarrow$ (1)，设存在一个各点互异的点列 $\{P_n\}$，使 $P_n \to P_0 (n \to \infty)$，则对任何 $\delta > 0$，存在 $K \in \mathbf{N}^+$，当 $n > K$ 时，$P_n \in U(P_0,\delta)$，因为 $\{P_n\}$ 是互异点列，所以在 $U(P_0,\delta)$ 中有无穷多个点 $\{P_{K+1},P_{K+2},\cdots\} \subset \{P_n\} \subset E$. 这样 P_0 是 E 的聚点.

上述三个命题既然是等价的，那么(1)，(2)和(3)都可以作为聚点的定义. 其中命题(3)告诉我们，点集的聚点必为 E 中一个互异点列的极限，因此，也常把 E 的

聚点叫作 E 的极限点.

根据上面引入的概念,对于一个给定的点集 E,我们可以考虑上述各种点的集合,其中重要的是下面四种.

定义 2.2.3 设 $E \subset \mathbf{R}^n$.

(1) 称 E 的全体内点所组成的集合为 E 的**内部**,记为 E^0;

(2) 称 E 的全体聚点所组成的集合为 E 的**导集**,记为 E';

(3) 称 E 的点及其聚点的全体所组成的集合为 E 的**闭包**,记为 $\overline{E}$,即 $\overline{E} = E \cup E'$;

(4) 称 E 的全体界点所组成的集合为 E 的**边界**,记为 ∂E.

例 2.2.1 对于正整数集 $\mathbf{N}^+ \subset \mathbf{R}$,每个正整数 n 都是 $\mathbf{N}^+$ 的孤立点,且 $(\mathbf{N}^+)^0 = \varnothing, (\mathbf{N}^+)' = \varnothing, \overline{\mathbf{N}^+} = \mathbf{N}^+, \partial\mathbf{N}^+ = \mathbf{N}^+$.

例 2.2.2 设 $\mathbf{Q}$ 为 $(0,1)$ 中全体有理数所组成的集合,因为对任何 $r \in \mathbf{Q}$,r 都不是 $\mathbf{Q}$ 的内点,所以 $\mathbf{Q}^0 = \varnothing$.

因为对任何 $x \in [0,1]$ 的任何邻域内总有 $\mathbf{Q}$ 的无穷多个点,所以 $\mathbf{Q}' = [0,1]$,因此 $\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{Q}' = \mathbf{Q} \cup [0,1] = [0,1]$.另一方面,对任何 $x \in [0,1]$ 的任何邻域内既有有理点(属于 $\mathbf{Q}$)又有无理点(不属于 $\mathbf{Q}$),故 x 为 $\mathbf{Q}$ 的界点,从而$\partial\mathbf{Q}=[0,1]$.

例 2.2.3 设 $I = (a,b) \subset \mathbf{R}$,则 $I^0 = I = (a,b), I' = [a,b], \overline{I} = I \cup I' = [a,b], \partial I = \{a,b\}$.

例 2.2.4 设 $E = \{(x,0) \mid a < x < b\} \subset \mathbf{R}^2$,则

$$E^0 = \varnothing, E' = \overline{E} = \partial E = \{(x,0) \mid a \leqslant x \leqslant b\} \subset \mathbf{R}^2.$$

从例 2.2.3、例 2.2.4 可以看出,在 $\mathbf{R}$ 上考虑线段和在 $\mathbf{R}^2$ 上考虑线段,尽管是同一条线段,然而,二者的内点和内部、聚点和导集、闭包以及边界等不一定完全一致.因此,在研究这些概念时,要与集所在的空间联系起来考虑.

关于点集 E 的闭包 $\overline{E}$,我们有 $\overline{E} = E \cup \partial E = E^0 \cup \partial E = E' \cup E$ 的全体孤立点.

尽管 $\overline{E}$ 的表示形式不同,但本质特征在于:**若 $P \in \overline{E}$,则在 P 的任一邻域 $U(P)$ 内都至少有一点属于 E.**

根据这一特征，可以得到下面闭包与内部的对偶关系：

定理 2.2.2 设 $E \subset \mathbf{R}^n$，则 $CE^0 = \overline{CE}, C\overline{E} = (CE)^0$.

证明 设 $P \in CE^0$，则对 P 的任何邻域 $U(P)$，都有 $q \bar{\in} E$，亦即对 P 的任何邻域 $U(P)$，都有点 $q \in CE$，由闭包的本质特征，$P \in \overline{CE}$，这样，$CE^0 \subset \overline{CE}$.

又设 $P \in \overline{CE}$，则对 P 的任何邻域 $U(P)$，都有点 $q \in CE$，所以 $P \bar{\in} E^0, P \in CE^0$，这样 $\overline{CE} \subset CE^0$，所以，$CE^0 = \overline{CE}$.

下面证明 $C\overline{E} = (CE)^0$.

设 $P \in C\overline{E}$，则 $P \bar{\in} \overline{E}$，由 $\overline{E}$ 的本质特征的，存在 P 的某邻域 $U(P)$，使 $U(P)$ 中不含 E 中的点 $\Rightarrow P \in (CE)^0$，这样 $C\overline{E} \subset (CE)^0$.

又设 $P \in (CE)^0$，则存在 P 的某邻域 $U(P)$，使 $U(P)$ 中不含 E 中的点，所以 $P \bar{\in} \overline{E}, P \in C\overline{E}$，这样，$(CE)^0 \subset C\overline{E}$，所以 $C\overline{E} = (CE)^0$.

定理 2.2.3 设 $A \subset B$，则 $A' \subset B', A^0 \subset B^0, \overline{A} \subset \overline{B}$.

证明 设 $P \in A'$，则点 P 的任何邻域 $U(P)$ 中都有无穷多个点属于 A，而 $A \subset B$，因而点 P 的任何邻域 $U(P)$ 中都有无穷多个点属于 B，所以 $P \in B'$，因此 $A' \subset B'$.

设 $P \in A^0$，则存在点 P 的某邻域 $U(P)$，使 $U(P) \subset A$，而 $A \subset B$，则 $U(P) \subset B$，所以 $P \in B^0$，因此 $A^0 \subset B^0$.

因为 $A \subset B, A' \subset B'$，所以 $A \cup A' \subset B \cup B'$，因此 $\overline{A} \subset \overline{B}$.

定理 2.2.4 $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

证明 一方面，因为 $A \subset A \cup B, B \subset A \cup B$，由定理 2.2.3 可知，$A' \subset (A \cup B)', B' \subset (A \cup B)'$，所以 $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$.

另一方面，设 $P \in (A \cup B)'$，往证 $P \in A' \cup B'$. 若不然，$P \bar{\in} A'$ 且 $P \bar{\in} B'$，则有 P 的某邻域 $U_1(P)$ 除 P 外不含 A 的任何点，也有 P 的某邻域 $U_2(P)$ 除 P 外不含 B 的任何点，作 P 的邻域 $U_3(P)$，使 $U_3(P) \subset U_1(P) \cap U_2(P)$，那么在 $U_3(P)$ 中除 P 点外不含 $A \cup B$ 的任何点，这与 $P \in (A \cup B)'$ 矛盾. 从而 $P \in A' \cup B'$，因此，$(A \cup B)' \subset A' \cup B'$. 综上，$(A \cup B)' = A' \cup B'$.

例 2.2.5 设 $A \subset \mathbf{R}$ 为非空集，求证：

(1) 若 A 是孤立点集(A 中的每个点都是孤立点)，则 $\overline{\overline{A}} \leqslant a$；

(2) $\overline{\overline{A-A'}} \leqslant a$;

(3) 若$\overline{\overline{A'}} \leqslant a$,则$\overline{\overline{A}} \leqslant a$.

证明 (1) 设 A 是孤立点集,则对任意的 $x \in A$,存在 $\delta_x > 0$,使得 $(x-\delta_x, x+\delta_x) \cap A = \{x\}$,对任意的 $x, y \in A$,当 $x \neq y$ 时,对满足上面的 δ_x, δ_y 再要求 $\delta_x \leqslant |x-y|, \delta_y \leqslant |x-y|$,这样,就有 $\frac{\delta_x}{2}+\frac{\delta_y}{2} \leqslant |x-y|$.于是

$$\left(x-\frac{\delta_x}{2}, x+\frac{\delta_x}{2}\right) \cap \left(y-\frac{\delta_y}{2}, y+\frac{\delta_y}{2}\right) = \varnothing.$$

取有理数 $r_x \in \left(x-\frac{\delta_x}{2}, x+\frac{\delta_x}{2}\right)$,使 x 与 r_x 对应,则 A 与有理数集 $\mathbf{Q}$ 的一个子集对等,因此 $\overline{\overline{A}} \leqslant a$.

(2) $A-A'$ 若非空,则必为孤立点集,由(1)可知 $\overline{\overline{A-A'}} \leqslant a$.

(3) 显然 $A \subset (A-A') \cup A'$.由题设,$\overline{\overline{A'}} \leqslant a$,而 $\overline{\overline{A-A'}} \leqslant a$,所以 $\overline{\overline{(A-A') \cup A'}} \leqslant a$,因此,$\overline{\overline{A}} \leqslant a$.

定理 2.2.5(Bolzano—Weierstrass)①**定理** 若 E 是 $\mathbf{R}^n$ 中一有界的无穷集合,则 E 至少有一个聚点 P (P 可以不属于 E),即 $E' \neq \varnothing$.

该定理的证明方法与数学分析课程中在 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{R}^2$ 情形的证明相同(也可见参考书目[3]).

2.3 开集和闭集

我们把 (a,b) 称做开区间,而把 $[a,b]$ 称做闭区间,(a,b) 与 $[a,b]$ 的区别在于 (a,b) 中的点都是内点,而 $[a,b]$ 则不同,点 a 和点 b 是 $[a,b]$ 的边界点(也是聚点).对于一般的集合,我们有如下定义:

定义 2.3.1 设 $E \subset \mathbf{R}^n$,若 E 中的每一个点都是 E 的内点,则称 E 为**开集**.

例如,全空间 $\mathbf{R}^n$ 及$\varnothing$都是开集;$\mathbf{R}$ 中的开区间 (a,b) 是 $\mathbf{R}$ 中的开集;单位开圆盘 $\{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的开集;直线上的有理数集、无理数集都不是 $\mathbf{R}$ 中的开集.

---

① 波耳撒诺—维尔斯特拉斯(1815—1897),德国数学家

定义 2.3.2 设 $E \subset \mathbf{R}^n$，如果 E 的每一个聚点都属于 E，则称 E 为**闭集**.

例如，全空间 $\mathbf{R}^n$ 及 $\varnothing$ 都是闭集；闭区间 $[a,b]$ 是 $\mathbf{R}$ 中的闭集；单位闭圆盘 $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$ 及 $\{(x,0) \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 都是 $\mathbf{R}^2$ 中的闭集；直线上的有理数集、无理数集都不是 $\mathbf{R}$ 中的闭集.

因为显然有 $E^0 \subset E$，∂E 中的点或者是 E 的聚点或者是 E 的孤立点，所以，E 为开集的充要条件是 $E = E^0$，E 为闭集的充要条件是 $\partial E \subset E$.

定理 2.3.1 对任何点集 $E \subset \mathbf{R}^n$，E^0 是开集，E' 和 $\overline{E}$ 都是闭集.

证明 若 $E^0 = \varnothing$，则 E^0 是开集.

若 $E^0 \neq \varnothing$，任取 $P \in E^0$，由 E^0 的定义可知 P 是 E 的内点，存在 P 的某邻域 $U(P) \subset E$，对任意的 $q \in U(P)$，存在 q 的某邻域 $U(q)$，使 $U(q) \subset U(P) \subset E$，所以，$q$ 是 E 的内点，因此，$U(P) \subset E^0$，由此，P 是 E^0 的内点，即 $P \in (E^0)^0$，亦即 $E^0 \subset (E^0)^0$，于是 E^0 是开集.

下面证明 E' 是闭集. 若 E' 没有聚点，即 $(E')' = \varnothing$，这时 $(E')' \subset E'$，E' 是闭集.

若 E' 有聚点，任取 $P \in (E')'$，往证 $P \in E'$. 由 $P \in (E')'$，在 P 的任意邻域 $U(P)$ 内，有一个属于 E' 而异于 P 的点 P_1，因为 $P_1 \in U(P)$，则有 P_1 的邻域 $U(P_1) \subset U(P)$，并且 $P \bar{\in} U(P_1)$（设 $U(P)$ 的半径为 δ，取 $U(P_1)$ 的半径 $\delta_1 = \min\left\{\frac{1}{2}\rho(P_1,P), \frac{1}{2}(\delta-\rho(P_1,P))\right\}$，由 $P_1 \in E'$，在 $U(P_1)$ 内有一个属于 E 而异于 P_1 的点 P_2，从而在 $U(P)$ 中有一个属于 E 而异于 P 的点 P_2（$P \bar{\in} U(P_1)$，$P_2 \in U(P_1)$），因此 $P \in E'$，这样 $(E')' \subset E'$，于是 E' 是闭集.

再证 $\overline{E}$ 是闭集.

因为 $(\overline{E})' = (E \cup E')' = E' \cup (E')' \subset E' \cup E' = E' \subset \overline{E}$，所以 $\overline{E}$ 是闭集.

定理 2.3.2 开集与闭集的对偶性：

(1) 若 G 是开集，则 CG 是闭集；

(2) 若 F 是闭集，则 CF 是开集.

证明 (1) 设 G 是开集. 若 $(CG)' = \varnothing$，则 $(CG)' \subset CG$，CG 是闭集. 若 $(CG)' \neq \varnothing$，取 $P_0 \in (CG)'$，则 P_0 的任何邻域 $U(P_0)$ 都有 CG 中异于 P_0 的点，亦即 P_0 的任何邻域 $U(P_0)$ 都有不属于 G 的点，所以，$P_0 \bar{\in} G^0 = G$，因而，$P_0 \in CG$.

这样 $(\complement G)' \subset \complement G$，于是 $\complement G$ 是闭集.

(2) 设 F 是闭集，往证 $\complement F$ 是开集，即要证 $\complement F \subset (\complement F)^0$. 若 $\complement F = \varnothing$，则 $\complement F \subset (\complement F)^0$，$\complement F$ 是开集. 若 $\complement F \neq \varnothing$，任取 $P_0 \in \complement F$，则 $P_0 \bar{\in} F$，则存在 P_0 的某邻域 $U(P_0)$，使 $U(P_0) \subset \complement F$，若不然，对 P_0 的任何邻域 $U(P_0)$ 都有一个 F 中的点，这个点又异于 P_0（因 $P_0 \bar{\in} F$），这样 $P_0 \in F'$，由 F 是闭集，就有 $P_0 \in F$，与 $P_0 \in \complement F$ 矛盾. 从而 $U(P_0) \subset \complement F$. 因此 P_0 是 $\complement F$ 的内点，所以 $\complement F \subset (\complement F)^0$，于是，$\complement F$ 是开集.

定理也可以这样证明：

设 G 是开集，由 $\overline{\complement G} = \complement G^0 = \complement G$，因此 $\complement G$ 是闭集.

设 F 是闭集，由 $(\complement F)^0 = \complement \bar{F} = \complement F$，因此 $\complement F$ 是开集.

定理 2.3.3　(1) 任意多个开集的并集是开集；(2) 有限多个开集的交集是开集.

证明　(1) 设 $\{G_\alpha \mid \alpha \in I\}$ 是由任意多个开集组成的一个开集族，其中 I 为指标集. 往证 $G = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ 是开集.

不妨设 $G \neq \varnothing$，任取 $P \in G$，则存在某一 $\alpha_0 \in I$，使 $P \in G_{\alpha_0}$. 因为 G_{α_0} 是开集，所以有 P 的某邻域 $U(P)$，使 $U(P) \subset G_{\alpha_0} \subset G$，这样 P 是 G 的内点，因此 $G \subset G^0$，于是 G 是开集.

(2) 设 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 是有限个开集，往证 $G = \bigcap_{i=1}^{n} G_i$ 是开集.

不妨设 $G \neq \varnothing$，任取 $P \in G$，则对每一个 $i(1 \leqslant i \leqslant n)$，有 $P \in G_i$，而每个 G_i 是开集，所以存在 δ_i，使 $U(P, \delta_i) \subset G_i (i = 1, 2, \cdots, n)$. 令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n\}$，则 $U(P, \delta) \subset \bigcap_{i=1}^{n} G_i = G$. 这样 P 是 G 的内点，因此 $G \subset G^0$，于是 G 是开集.

需要注意的是，任意多个开集的交不一定是开集. 例如，设 $G_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ $(n = 1, 2, \cdots)$，则每个 G_n 是开集，然而 $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\}$ 是闭集.

定理 2.3.4　(1) 任意多个闭集的交集是闭集；(2) 有限多个闭集的并集是闭集.

证明　该定理的证明可以运用集合运算的 De Morgan 公式和定理 2.3.3 直

接给出.

设 F_α（$\alpha \in I$，I 是指标集）是闭集. 因为 $\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha = C(C(\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha)) = C(\bigcup_{\alpha\in I} CF_\alpha)$，而由于 F_α 是闭集，所以由定理 2.3.2 可知 CF_α 是开集（$\alpha \in I$）.

由定理 2.3.3 知 $\bigcup_{\alpha\in I} CF_\alpha$ 是开集，再由定理 2.3.2 知 $\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha = C(\bigcup_{\alpha\in I} CF_\alpha)$ 是闭集.

同理可证 $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ 是闭集，其中 $F_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 是闭集.

需要注意的是，任意多个闭集的并也不一定是闭集. 例如，设 $F_n = [-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}](n = 1,2,\cdots)$，则每个 F_n 是闭集，然而 $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}] = (-1,1)$ 是开集.

尽管任意多个开集的交不一定是开集，任意多个闭集的并也不一定是闭集，但是有两种情形，即可数多个开集的交和可数多个闭集的并是值得重视的，这在以后会经常运用到.

定义 2.3.3 (1) 设集合 G 是可数多个开集 $\{G_1,G_2,\cdots,G_n,\cdots\}$ 的交集，即 $G=\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$，则称 G 为 G_δ 型集.

(2) 设集合 F 是可数多个闭集 $\{F_1,F_2,\cdots,F_n,\cdots\}$ 的并集，即 $F=\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$，则称 F 为 F_σ 型集.

由集合运算的 De Morgan 公式知，G_δ 型集的余集是 F_σ 型集，F_σ 型集的余集是 G_δ 型集.

例 2.3.1 设 $E \neq \varnothing, E \neq \mathbf{R}^n$，则 E 至少有一个界点，即 $\partial E \neq \varnothing$. 进而，若 $E \neq \varnothing, E \neq \mathbf{R}^n$，则 E 不能即是开集又是闭集.

证明 设 $E \subset \mathbf{R}^n, E \neq \varnothing, E \neq \mathbf{R}^n$，则 E 和 CE 都是非空集. 取 $P_0 = (x_1, x_2,\cdots,x_n) \in E, P_1 = (y_1,y_2,\cdots,y_n) \in CE$.

令 $P_t = (ty_1+(1-t)x_1, ty_2+(1-t)x_2,\cdots,ty_n+(1-t)x_n), 0 \leqslant t \leqslant 1$，则点集 $\{P_t \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ 是连接 P_0 和 P_1 的直线段.

设 $t_0 = \sup\{t \mid P_t \in E\}$，则 $0 \leqslant t_0 \leqslant 1$.

若 $P_{t_0} \in E$，则 $t_0 \neq 1$，对任意的 $t \in [0,1]$，满足 $t_0 < t \leqslant 1$，必有 $P_t \bar{\in} E$. 任取 t_m，使 $t_0 < t_m < 1$，且 $t_m \to t_0$，则 $P_{t_m} \to P_{t_0}$，由 $P_{t_0} \in E, P_{t_m} \bar{\in} E(m = 1.$

$2,\cdots)$，可知 $P_{t_0} \in \partial E$.

若 $P_{t_0} \bar{\in} E$，则 $t_0 \neq 0$，任取 t_m，使 $0 < t_m < t_0$，$t_m \to t_0$，则 $P_{t_m} \to P_{t_0}$，由 $P_{t_0} \bar{\in} E$，$P_{t_m} \in E(m=1,2,\cdots)$，所以 $P_{t_0} \in \partial E$.

这样 $\partial E \neq \varnothing$.

下面证明若 $E \neq \varnothing$，$E \neq \mathbf{R}^n$，则 E 不能即是开集又是闭集.

因为 $\partial E \neq \varnothing$，所以有 $P_0 \in \partial E$，P_0 或者是 E 的孤立点，或者是 E 的聚点，若 P_0 是 E 的孤立点，则 $P_0 \in E$，但 $P_0 \bar{\in} E^0$，所以 E 不是开集.

若 P_0 是 E 的聚点，当 $P_0 \in E$ 时，由 $P_0 \bar{\in} E^0$，则 E 不是开集. 当 $P_0 \bar{\in} E$ 时，则 E' 不包含于 E，所以 E 不是闭集.

因此，若 $E \neq \varnothing$，$E \neq \mathbf{R}^n$，则 E 不能即是开集又是闭集.

在数学分析课程中，已经学习了 $\mathbf{R}^2$ 中的 Heine-Borel 有限覆盖定理：

设 $D \subset \mathbf{R}^2$ 为一有界闭域，$\{\Delta_\alpha\}$ 为一开域族，它覆盖了 D（即 $D \subset \bigcup_\alpha \Delta_\alpha$），则在 $\{\Delta_\alpha\}$ 中必存在有限个开域 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$，它们同样覆盖了 D（即 $D \subset \bigcup_{i=1}^n \Delta_i$）（见参考书目[10]）.

在这里，把有限覆盖定理推广成更一般的情形，这种更一般的情形在参考书目[10]中也提到了，但没有给出证明.

定理 2.3.5 （Heine[①]-Borel[②] **有限覆盖定理**） 设 F 是一个有界闭集，μ 是一族开集，$\mu = \{U_\alpha \mid U_\alpha$ 是开集，$\alpha \in \Delta\}$，它覆盖了 F（即 $F \subset \bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha$），$\Delta$ 是指标集，则在 μ 中一定存在有限多个开集 $U_1, U_2, \cdots, U_m$，它们也覆盖了 F（即 $F \subset \bigcup_{i=1}^m U_i$）.

证明 因为 F 是有界闭集，所以有闭区间 $I \subset \mathbf{R}^n$，使 $F \subset I$.

设 $D = \mu \cup \{CF\}$，则 D 也是一个开集族，且 $\mathbf{R}^n \subset D$，因此 $I \subset D$.

对于 I 中任一点 P，存在开集 $U_P \in D$，使 $P \in U_P$，U_P 是开集，所以有开区间 $I_P \subset U_P$，且 $P \in I_P$，这样开区间族 $\{I_P \mid P \in I\}$ 覆盖了 I. 由数学分析中的有限覆盖定理（区间是域）可知，存在 $\{I_P \mid P \in I\}$ 中的有限个开区间 $I_{P_1}, I_{P_2}, \cdots, I_{P_m}$，它

---

① 海涅（1821—1881），德国数学家.

② 博雷尔（1871—1956），法国数学家.

们仍然覆盖 I. 由 $F\subset I$ 及 $I_{P_i}\subset U_{P_i}(i=1,2,\cdots,m)$, 知 $F\subset\bigcup_{i=1}^{m}U_{P_i}$, 如果 D 中的开集 CF 不在这 m 个开集中,则 μ 中的有限个开集 $U_{P_1},U_{P_2},\cdots,U_{P_m}$ 覆盖了 F, 定理得证;如果 D 中的开集 CF 在上述的 m 个开集中,则从这 m 个开集中去掉 CF, 由 $CF\cap F=\varnothing$, 知剩下的 $m-1$ 个开集也覆盖了 F. 定理得证.

以上我们讨论了 $\mathbf{R}^n$ 中的开集和闭集,并得到了一些很有用的结果. 下面定义的两种集也是很重要的,其概念在后面会经常出现.

定义 2.3.4 设 $E\subset\mathbf{R}^n$, 若 $E\subset E'$, 则称 E 是**自密集**.

由定义知, E 为自密集即 E 的每一点都是它的聚点. 自密集是不含任何孤立点的.

例如,开区间 $I=(a,b)$ 是 $\mathbf{R}$ 中的自密集,因为 $I\subset I'=[a,b]$.

全体有理数集 $\mathbf{Q}$ 及全体无理数集都是 $\mathbf{R}$ 中的自密集.

定义 2.3.5 设 $E\subset\mathbf{R}^n$, 若 $E=E'$, 则称 E 是**完备集**(或完全集).

由定义知,完备集是自密的闭集,或者说是不含孤立点的闭集.

例如,闭区间 $[a,b]$, 集 $E=[0,1]\cup[2,3]$ 都是直线上的完备集. 全空间 $\mathbf{R}^n$ 及 $\varnothing$ 也都是完备集.

2.4 10进位表数法

在前面证明 $(0,1)$ 不是可数集时,我们应用了 10 进位表数法,在证明 $2^a=c$ 时也用到 2 进位表数法,在后面讨论 Cantor 集的基数时还要用到 3 进位表数法. 大家都知道,计算机用的是 2 进位表数法. 对于 $p\in\mathbf{N}^+$ $(p>1)$, p 进位表数法,在数学理论或应用都有可能涉及,因此,很有必要对 p 进位表数法($p\in\mathbf{N}^+,p>1$)作比较深入的研究.

设 x 是任意一个小于 1 的正实数,即 $x\in(0,1)$, 用分点 $0=C_0^1,C_1^1,C_2^1,\cdots,C_{p-1}^1,C_p^1=1$, 将 $[0,1]$ 均分为 p 段(如图所示是 $p=3$ 的情形).

$$C_0^1=0\qquad C_1^1=\frac{1}{3}\qquad C_2^1=\frac{2}{3}\qquad C_3^1=1$$

若 x 不是分点,则应有唯一的一小段 $[C_{\alpha_1}^1,C_{\alpha_1+1}^1]$ 包含 x, $\alpha_1\leqslant p-1$ (α_1 可能

为 0)，此时则说 x 的第一位小数是 α_1．如果 $x=C_i^1(0<i<p)$ 是一个分点，则包含 x 的小段就有两个，即 $[C_{i-1}^1, C_i^1]$ 和 $[C_i^1, C_{i+1}^1]$．此时 x 的第一位小数的取法就有两个，即 $i-1$ 和 i，称取 $\alpha_1=i-1$ 时为第一种表示法，取 $\alpha_1=i$ 时为第二种表示法．

现设已取定了一种，则可用分点 $C_{\alpha_1}^1=C_0^2, C_1^2, C_2^2, \cdots, C_{p-1}^2, C_p^2=C_{\alpha_1+1}^1$，将区间 $[C_{\alpha_1}^1, C_{\alpha_1+1}^1]$ 均分为 p 段，仿照前面的作法，定义 x 的第二位小数 α_2．当然，如果 x 不是第一次分割时的分点，但却是第二次分割的分点，则在定义第二位小数时，又应该有两种表示法．而如果 x 是第一次分割时的分点，即 $x=C_0^2$ 或 C_p^2，则 x 只能属于唯一的一小段，因此它们的第二位小数只有一个取法，并且在 $x=C_0^2$（定义第一位小数时用了第二种表示法）时，第二位小数 α_2 必须为 0，并且以后各位小数也永远是 0；在 $x=C_p^2$ 时（定义第一位小数用了第一种表示法），第二位小数 α_2 必为 $p-1$，并且以后各位小数也永远是 $p-1$．

继续这个方法，如果 x 永远不是分点，则 $x\sim 0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots$，表示法是唯一的．

如果 x 是第 k 次的分点，而不是第 $k-1$ 次的分点，则在定义第 k 位小数时，将 $[C_{\alpha_{k-1}}^{k-1}, C_{\alpha_{k-1}+1}^{k-1}]$ 均分为 p 段，分点为

$$C_{\alpha_{k-1}}^{k-1}=C_0^k, C_1^k, C_2^k, \cdots, C_{p-1}^k, C_p^k=C_{\alpha_{k-1}+1}^{k-1}.$$

若 x 是分点 $C_i^k(0<i<p)$，则包含 x 的小段有两个，即 $[C_{i-1}^k, C_i^k]$ 和 $[C_i^k, C_{i+1}^k]$，此时 x 的第 k 位小数的取法就有两个，即 $i-1$ 和 i，同定义第一位小数一样，称取第 k 位小数 $\beta_k=i-1$ 时为第一种表示法，取 $\beta_k=i$ 时为第二种表示法．

此时 β_k 是 $0,1,2,\cdots,p-1$ 这 p 个数之一，仿照前面的讨论

$$x\sim\begin{cases}0.\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{k-1}\beta_k(p-1)(p-1) & \cdots\cdots\quad \text{第一种表示法；}\\ 0.\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{k-1}(\beta_k+1)0\quad 0 & \cdots\cdots\quad \text{第二种表示法.}\end{cases}\tag{2.4.1}$$

对于 (0,1) 上的每一点 x，如果 $x\neq\dfrac{m}{p^k}(0<m<p^k)$，则 x 可以唯一地表示成 p 进位无限小数的形式：

$$x=0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\tag{2.4.2}$$

如果 $x=\dfrac{m}{p^k}(0<m<p^k)$，它有两种表示法，见式(2.4.1)．可以证明与式(2.4.2)对应的 x 是唯一的．

事实上,对 $0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots$,将

$$\alpha_1 \text{ 对应到 } [C^1_{\alpha_1}, C^1_{\alpha_1+1}]$$

$$\alpha_2 \text{ 对应到 } [C^2_{\alpha_2}, C^2_{\alpha_2+1}]$$

$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots$$

$$\alpha_k \text{ 对应到 } [C^k_{\alpha_k}, C^k_{\alpha_k+1}]$$

$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots$$

显然 $[C^k_{\alpha_k}, C^k_{\alpha_k+1}] \subset [C^{k-1}_{\alpha_{k-1}}, C^{k-1}_{\alpha_{k-1}+1}]$.

由此构造出一个逐个包含的闭区间套,并且它们的长度 $\frac{1}{p^n} \to 0(n \to \infty)$.

故由 Cantor 的闭区间套定理可知,应有唯一的一点 x 属于所有这些闭区间.

显然与 x 对应的无穷序列就是式(2.4.2),故 $x = 0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots$,而且对于式(2.4.2)的无穷序列,按上述构造的闭区间套不会从某一个之后所有的闭区间都有一个共同的端点,因此与式(2.4.2)对应的 x 是唯一的.

对于式(2.4.2)表示的两个不同的序列 $0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots$,$0.\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3\cdots$,必有某一位小数(比如第 k 位)不同.按上述构造闭区间套的过程,它们所对应的闭区间列的第 k 个闭区间 $[C^k_{\alpha_k}, C^k_{\alpha_k+1}]$ 和 $[C^k_{\alpha'_k}, C^k_{\alpha'_k+1}]$ 不相交,这样,当 $j > k$ 时,它们所对应的闭区间列的第 j 个闭区间都不相交,因此对应的点 x 和 x' 一定不同.

在证明 (0,1) 不是可数集时提到的 (0,1) 中小数的正规表示,说的就是式(2.4.2)和式(2.4.1)的第一种表示法.

2.5　直线上开集的构造

我们知道,在直线上,开区间是开集,它比较简单,直线上的开集虽然不一定是一个开区间,但是它却与开区间有着必然的联系,本节的讨论就在于揭示这种联系,从而得到直线上开集的构造.

1. 直线上开集和闭集的构造

定义 2.5.1　设 G 是直线上的开集.如果开区间 $(\alpha,\beta) \subset G$,而且端点 α,β 不

属于G，那么称(α,β)为G的一个**构成区间**.

例如开集$(0,1)\cup(2,3)$的构成区间是$(0,1)$及$(2,3)$.

定理 2.5.1(开集的构造定理) 直线上任意一个非空开集可以表示成有限个或可列个互不相交的构成区间的并集. 又当非空开集表示成互不相交的开区间的并集时,这些开区间必是构成区间.

证明 设$G\subset\mathbf{R}$是开集.

(1) G的任何两个不同的构成区间必不相交,并且G的构成区间全体是至多可数集. 若不然,设(α_1,β_1)和(α_2,β_2)是G的两个构成区间,但相交,则必有一开区间的一个端点落在另一个开区间内. 不妨设$\alpha_1\in(\alpha_2,\beta_2)$. 由$(\alpha_2,\beta_2)\subset G$,有$\alpha_1\in G$,这与$(\alpha_1,\beta_1)$是$G$的构成区间矛盾.

我们在G的每一个构成区间中取一有理数与这个构成区间对应,设这些有理数全体为$\mathbf{Q}_1$,由于G的构成区间互不相交,则G的构成区间全体与有理数集$\mathbf{Q}$的一个子集$\mathbf{Q}_1$对等,因而G的构成区间全体是至多可数集.

(2) 开集G中的任何一点必含在一个构成区间中,任取$x_0\in G$,设$A_{x_0}=\{(\alpha,\beta)\mid x_0\in(\alpha,\beta)\subset G\}$,因为$G$是开集,所以$A_{x_0}$非空. 记$\alpha_0=\inf\limits_{(\alpha,\beta)\in A_{x_0}}\{\alpha\}$,$\beta_0=\sup\limits_{(\alpha,\beta)\in A_{x_0}}\{\beta\}$($\alpha_0$可能是$-\infty$,$\beta_0$可能是$+\infty$).

显然$x_0\in(\alpha_0,\beta_0)$. 下面证明(α_0,β_0)是G的构成区间. 先证$(\alpha_0,\beta_0)\subset G$,设$x'\in(\alpha_0,\beta_0)$,若$x'\leqslant x_0$,则由$\alpha_0=\inf\limits_{(\alpha,\beta)\in A_{x_0}}\{\alpha\}$,对于$x'=\alpha_0+(x'-\alpha_0)$,必有$(\alpha,\beta)\in A_{x_0}$,使$\alpha_0\leqslant\alpha<x'\leqslant x_0$(下确界定义),这样,$x'\in(\alpha,x_0]\subset(\alpha,\beta)\subset G$.

若$x'>x_0$,则由$\beta_0=\sup\limits_{(\alpha,\beta)\in A_{x_0}}\{\beta\}$,对$x'=\beta_0-(\beta_0-x')$,必有$(\alpha_1,\beta_1)\in A_{x_0}$,使$x_0<x'<\beta_1\leqslant\beta_0$(上确界定义),这样,$x'\in(x_0,\beta_1)\subset(\alpha_1,\beta_1)\subset G$.

因此$(\alpha_0,\beta_0)\subset G$,并且由于$x_0\in(\alpha_0,\beta_0)$,有$(\alpha_0,\beta_0)\in A_{x_0}$.

再证$\alpha_0\bar{\in}G$,若不然,$\alpha_0\in G$,则因为G是开集,必有开区间(α',β'),使$\alpha_0\in(\alpha',\beta')\subset G$,这样由$\alpha'<\alpha_0<x_0<\beta_0$,有$x_0\in(\alpha',\beta_0)$,而$(\alpha',\beta_0)\subset(\alpha',\beta')\cup(\alpha_0,\beta_0)\subset G$,因此$(\alpha',\beta_0)\in A_{x_0}$,而$\alpha'<\alpha_0$,这与$\alpha_0$是$A_{x_0}$中的区间左端点全体的下确界矛盾. 所以$\alpha_0\bar{\in}G$. 同理可证$\beta_0\bar{\in}G$,所以$(\alpha_0,\beta_0)$是$G$的构成区间.

(3) 作G的所有构成区间的并集$\bigcup\limits_n(\alpha_n,\beta_n)$. 由(2),$G\subset\bigcup\limits_k(\alpha_k,\beta_k)$,由构成区

间的定义有 $\bigcup_{n}(\alpha_n,\beta_n)\subset G$，可知 $G=\bigcup_{n}(\alpha_n,\beta_n)$，由于 G 是至多可数个互不相交的构成区间的并集，因此 $G=\bigcup_{k=1}^{\infty}(\alpha_k,\beta_k)$ 或者 $G=\bigcup_{k=1}^{m}(\alpha_k,\beta_k)$.

这样定理的第一部分得证.

(4) 设 $G=\bigcup_{k}(\alpha'_k,\beta'_k)$ 是一组互不相交的开区间的并集，我们证明每个 (α'_k,β'_k) 是 G 的构成区间. 显然 $(\alpha'_k,\beta'_k)\subset G$，若 $\alpha'_k\in G$，则必有 $L\neq k$ 使 $\alpha'_k\in(\alpha'_L,\beta'_L)$，这与 (α'_k,β'_k) 和 (α'_L,β'_L) 不相交矛盾，因此 $\alpha'_k\bar{\in} G$. 同理可证 $\beta'_k\bar{\in} G$，所以 (α'_k,β'_k) 是构成区间. 至此，定理得证.

2. 闭集和完备集的构造

定义 2.5.2 设 A 是直线上的闭集，称 A 的余集 CA 的构成区间为 A 的**余区间**.

这样我们得到直线上闭集的构造如下：

定理 2.5.2 直线上的闭集 F 或者是全直线，或者是从直线上挖掉有限个或可数多个互不相交的开区间(即 F 的余区间)所得到的集合.

由孤立点的定义很容易知道，直线上点集 A 的孤立点必是包含在 A 的余集中的某两个开区间的公共端点. 因此，闭集的孤立点一定是它的两个余区间的公共端点. 完备集是没有孤立点的闭集. 所以，完备集就是没有相邻接的余区间的闭集. 这也就是完备集的构造.

3. 康托集(Cantor set)

康托集的构造

从 $[0,1]$ 挖掉 $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$，再从剩下的 $[0,\frac{1}{3}]$ 和 $[\frac{2}{3},1]$ 中挖掉 $(\frac{1}{9},\frac{2}{9})$ 和 $(\frac{7}{9},\frac{8}{9})$. 一般地，第 n 次挖掉 2^{n-1} 个开区间，剩下 2^n 个长度是 3^{-n} 的互相隔离的闭区间，如此继续下去，就从 $[0,1]$ 中挖掉了可数多个互不相交，而且没有公共端点的开区间. 设挖掉的这些开区间的并集为 G，则 G 为开集.

称 $P=[0,1]-G$ 为**康托集**. 也称 G 为**康托开集**.

因为 $P=[0,1]-G=[0,1]\cap \complement G$，因此 P 是闭集.

P 是完备集

因为 P 的任何两个余区间没有公共端点(不相邻接)，因此 P 是完备集.

P 没有内点

任取 $x\in P$，往证 x 不是 P 的内点，即要证对任何 $\delta>0$，在 $U(x,\delta)$ 内总含有不属于 P 的点. 事实上，对任何 $\delta>0$，取 $n\in \mathbf{N}^+$，使 $3^{-n}<\delta$，则在进行第 n 次挖除过程后，x 必在余下的 2^n 个长度为 3^{-n} 的互相隔离的闭区间中的某一个内，不妨记为 Δ，$x\in\Delta$. 显然 $\Delta\subset U(x,\delta)$ (因为对任意的 $y\in\Delta$，$\rho(x,y)\leqslant 3^{-n}<\delta$). 因为接下去还要对 Δ 进行三等分并挖去中间的开区间，因此在 Δ 中含有不属于 P 的点，这样在 $U(x,\delta)$ 中含有不属于 P 的点，因此 $x\bar{\in} P^0$，于是 P 没有内点.

p 是疏朗集

定义 2.5.3 如果一个点集 E 具有性质:空间任一邻域内至少包含某点的一个邻域，使其中不含 E 的点，则称 E 是疏朗集.

下面证明 P 是疏朗集.

因为 P 是没有内点的集，所以 P 的任一邻域内至少有一点 x 不属于 P，所以 $x\in CP$，CP 是开集，所以有 x 的某邻域 $U(x)\subset CP$，因此 $U(x)$ 不含 P 中点，于是 P 是疏朗集.

$\overline{\overline{P}}=c$

证明 将 $(0,1)$ 中的实数表示成正规三进位无限小数，令 A 是这些三进位无限小数中不出现数字 1 的全体. 即

$$A=\{x=0.a_1a_2\cdots a_k\cdots \mid a_k\text{ 是 }0\text{ 或 }2,\ k=1,2,\cdots\},$$

则 $A\subset(0,1)\subset[0,1]$，由 $A\cap G=\varnothing$ (G 是康托开集)，这样 $A\subset[0,1]-G=P$.

显然 A 与二进位正规表示的无限小数全体 $(0,1)$ 可建立一一对应，这只须令

$$x=0.a_1a_2a_3\cdots a_k\cdots\rightarrow y=0.\frac{a_1}{2}\frac{a_2}{2}\cdots\frac{a_k}{2}\cdots \text{ 即可.}$$

这里 x 是三进位小数中不出现数字 1 的，y 是二进位小数.

于是 $\overline{\overline{A}}=c$. 由 $A\subset P\subset[0,1]$，而 $\overline{\overline{[0,1]}}=c$，于是 $\overline{\overline{P}}=c$.

在本节中，我们讨论了直线上的开集、闭集和完备集的构造，也较为全面、深入地讨论了康托集.

顺便需要说明的是，当 $n>1$ 时，$\mathbf{R}^n$ 中的开集一般不能表示成至多可数个互不相交的 n 维开区间的并，但总可以表示成可数个互不相交的半开半闭区间的并，不过这种表示法没有唯一性. 这个结果将在第 3 章给出证明.

习 题

1. 求下列各点集的内部、导集、闭包和边界：

(1) 实直线上开区间 (a,b) 中全体无理数所成之集 J ；

(2) $E=\{1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\}\subset\mathbf{R}$ ；

(3) $\mathbf{R}^2$ 中的点集 $E=\left\{(x,y)\mid-\infty<x<+\infty,y=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}\right\}$.

2. 证明：开集减闭集后的差集仍是开集；闭集减开集后的差集仍是闭集.

3. 证明：(1) 有限集必为闭集；(2) 非空完备集必为无限集；(3) 非空开集必有连续基数 c .

4. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的实值连续函数，则对于任意常数 a，$E=\{x\mid f(x)>a\}$ 是一个开集；而 $E=\{x\mid f(x)\geqslant a\}$ 是一个闭集.

5. 证明：每个闭集必是可数个开集的交集；每个开集可以表示成可数个闭集的并集.

6. 证明：$f(x)$ 为 $[a,b]$ 上连续函数的充分必要条件是对任意实数 c，集 $E=\{x\mid f(x)\geqslant c\}$ 和 $E_1=\{x\mid f(x)\leqslant c\}$ 都是闭集.

7. 证明：$P_0\in E'$ 的充分必要条件是对任意包含 P_0 的邻域 $U(P,\delta)$ (不一定以 P_0 为中心)，恒有 $U(P,\delta)\cap(E-\{P_0\})\neq\varnothing$.

8. 设 A 为直线中的点集，若 A' 是非空的至多可数集，则 A 为可数集.

9. 设 $E\subset\mathbf{R}^n$. 证明：

(1) 若 G 是开集，且 $G\subset E$，则 $G\subset E^0$ ；

(2) 若 F 是闭集，且 $E\subset F$，则 $\overline{E}\subset F$.

10. 设 $\{I_i\}(i=1,2,\cdots)$ 是一列开区间，如果 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}I_i\neq\varnothing$，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}I_i$ 是一个开区

间.

11. 证明：$\mathbf{R}^n$ 中孤立点集是至多可数集.

12. 是否存在 $[0,1]$ 上的函数满足：在有理点处都连续，而在无理点处都不连续？证明你的结论.

第3章 测度论

实变函数论的核心内容是勒贝格(Lebesgue)积分.本章介绍勒贝格测度理论是为建立勒贝格积分作好必要的准备.

在 $\mathbf{R}^n$ 中建立 Lebesgue 积分理论,不可避免地要对 $\mathbf{R}^n$ 中的一般点集 E 给出类似于 $\mathbf{R}$ 中区间长度的"适当的度量",这种度量就是以后所说的测度.

对于 $\mathbf{R}$ 中的区间长度的度量,归纳我们日常生活经验,不难发现我们已经在潜移默化地使用了以下约定俗成的公理,即长度公理.

长度公理 对于实数直线上的一些点集所构成的集合族 μ,若对于每个 $E\in\mu$,都对应一个实数 $m(E)$($m(E)$ 是定义在 μ 上的集函数),使得:

(1) $m(E)\geqslant 0$(非负性);

(2) 如果 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 两两不相交,那么

$m(E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_n)=m(E_1)+m(E_2)+\cdots+m(E_n)$(有限可加性);

(3) $m([0,1])=1$(正则性).

但是,仅仅根据凭经验得来的这三条长度公理,实际上只给出了区间 $[a,b]$ 的长度,能够量出"长度"的点集是不多的,能做到的也只是有限个线段之并那样的点集.例如,$[0,1]$ 中"有理数集合"是可数个点之并,就没有长度可言.同样 $[0,1]$ 中"无理数集合"的长度是多少也无法确定.这样,我们应该修改长度公理,扩大集合族 μ 的范围,使更多的集合具有新意义的长度,也就是我们所说的测度.

看来,非负性和正则性的要求非常自然,是不能修改的,那么只有修改第二条的有限可加性.

我们很自然地想到把有限可加性改为"无限可加性",然而无限可加性的提法不能是任意的,这是因为如果简单地提无限可加性会出现矛盾,例如,一点 a 所成

的集合的长度是 $m([a,a]) = a - a = 0$,如果任意无限可加性可以成立,那么 $[0,1]$ 中全体有理数和全体无理数所成集合的长度都是 0,于是区间 $[0,1]$ 的长度也是 0,这是矛盾的.

法国数学家 Lebesgue 用可数可加性考察如下的"测度":

勒贝格测度公理 对于实数直线上的一部分集合构成的集合族 μ ,使得每个 $E \in \mu$,都对应一个实数 $m(E)$,满足:

(1) $m(E) \geqslant 0$ (非负性);

(2) 如果 $E_1, E_2, \cdots, E_n \cdots$ 两两不相交,那么

$$m(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n \cup \cdots) =$$
$$m(E_1) + m(E_2) + \cdots + m(E_n) + \cdots \text{(可数可加性)};$$

(3) $m([a,b]) = b - a$ (正则性).

根据这一公理,$[0,1]$ 中有理数集是可数个点的集合,每个点的测度是 0,所以它的勒贝格测度是 0;而 $[0,1]$ 中无理数集不可数,勒贝格测度就不会是 0 了,应该是 1.

那么,满足勒贝格测度公理的在集合族 μ 上定义的集函数 $m(E)$ 是否存在呢? μ 由哪些集合所构成? 是否每个集合都有测度呢? 这些都是本章要解决的问题.

3.1 外测度

众所周知,在 $\mathbf{R}^2$ 中,求圆 A 的面积可以用包含它的外切多边形面积的下确界来定义. 更一般地,我们可以用一些长方形(在 $\mathbf{R}^2$ 也称为区间)去分割圆 A ,然而长方形的面积之和近似代替圆 A 的面积的这种想法也可以求 $\mathbf{R}^n (1 \leqslant n < +\infty)$ 中一般的立体的体积的近似值. 这一想法正是我们定义外测度的出发点,启发我们给出如下外测度的定义:

定义 3.1.1 设 E 是 $\mathbf{R}^n$ 中的点集, $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一列开区间, $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$,则 $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$ 确定一个非负的数 u (u 可以等于 $+\infty$). 记

$$m^* E = \inf \left\{ u \mid u = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| ,\ E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n ,\ I_n \text{ 是开区间} \right\},$$

称 $m^* E$ 为 E 的 Lebesgue 外测度.

应该注意到，由于没有假定 E 是有界集，所以 $m^* E$ 有可能是 $+\infty$.

定理 3.1.1　(1) $m^* E \geqslant 0$ ，当 E 为空集时，$m^* E = 0$（非负性）；

(2) 若 $A \subset B$ ，则 $m^* A \leqslant m^* B$（单调性）；

(3) $m^* (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m^* A_i$（次可数可加性）.

证明　(1) 对任何覆盖 E 的开区间列 $\{I_n\}$ ，都有 $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \geqslant 0$ ，因而 0 是 $\{u \mid u = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|,\ E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,\ I_n$ 是开区间$\}$ 的一个下界，因而 $0 \leqslant \inf \{u \mid u = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|,\ E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,\ I_n$ 是开区间$\}$ ，即 $m^* E \geqslant 0$.

当 $E = \varnothing$ 时，则对任意的 $\varepsilon > 0$ ，设

$$I_i = \left\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid -\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2^i}\right)^{\frac{1}{n}} < x_k < \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2^i}\right)^{\frac{1}{n}}, k = 1, 2, \cdots, n\right\},$$

则 $|I_i| = \frac{\varepsilon}{2^i}$ ，而 $\varnothing \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ ，$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$ ，所以 $m^* \varnothing \leqslant \varepsilon$ ，由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，所以 $m^* \varnothing = 0$.

(2) 设 $A \subset B$ ，则任一覆盖了 B 的开区间列 $\{I_n\}$ 也覆盖了 A ，即 $\{u \mid u = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|,\ B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,\ I_n$ 是开区间$\} \subset \{u \mid u = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|,\ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,\ I_n$ 是开区间$\}$.

所以 $\inf \{u \mid u = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|,\ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,\ I_n$ 是开区间$\} \leqslant \inf \{u \mid u = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|,\ B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, I_n$ 是开区间$\}$.

因此 $m^* A \leqslant m^* B$.

(3) 对任意的 $\varepsilon > 0$ ，由下确界含义，对每个 n 都有一开区间列 $\{I_{n,m}\}_{m=1}^{\infty}$ ，使 $A_n \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} I_{n,m}$ ，而 $\sum_{m=1}^{\infty} |I_{n,m}| \leqslant m^* A_n + \frac{\varepsilon}{2^n}$（本来应该是“$<$”号，这里用“$\leqslant$”号，是因为 $m^* A_n$ 可能是 $+\infty$).

这样 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} I_{n,m}$ ，且

$$\begin{aligned}\sum_{n,m=1}^{\infty}|I_{n,m}| &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|I_{n,m}| \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left(m^* A_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} m^* A_n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} m^* A_n + \varepsilon\end{aligned}$$

因此，$m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leqslant \sum_{n,m=1}^{\infty}|I_{n,m}| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m^* A_n + \varepsilon$，由 $\varepsilon > 0$ 是任意的，于是

$$m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m^* A_n.$$

例 3.1.1 设 A 是可数点集，则 $m^* A = 0$.

证明 因为 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的可数点集，所以设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots\}$，其中 $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})(i = 1,2,\cdots)$，对任意的 $\varepsilon > 0$，设

$$I_i = \left\{(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in}) \mid a_{ij} - \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2^i}\right)^{\frac{1}{n}} < x_{ij} < a_{ij} + \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2^i}\right)^{\frac{1}{n}}, j = 1,2,\cdots,n\right\},$$

则 $|I_i| = \frac{\varepsilon}{2^i}$，且 $a_i \in I_i$，$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$，$\sum_{i=1}^{\infty}|I_i| = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$，所以 $m^* A \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}|I_i| = \varepsilon$，由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，所以 $m^* A = 0$.

例 3.1.2 设 I 是区间，则 $m^* I = |I|$.

证明 (1) 设 I 为闭区间，对任意的 $\varepsilon > 0$，存在开区间 I'，使得 $I \subset I'$，且 $|I'| < |I| + \varepsilon$，由外测度定义，$m^* I \leqslant |I'| < |I| + \varepsilon$，由 $\varepsilon > 0$ 是任意的，有 $m^* I \leqslant |I|$.

下证 $m^* I \geqslant |I|$. 对任意的 $\varepsilon > 0$，存在一列开区间 $\{I_i\}$，使 $I \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$，且 $\sum_{i=1}^{\infty}|I_i| < m^* I + \varepsilon$. 由有限覆盖定理，在 $\{I_i\}$ 中存在有限多个开区间 $I_{i_1}, I_{i_2}, \cdots, I_{i_n}$，使得 $I \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_{i_k}$.

因为 $I = I \cap \bigcup_{k=1}^{n} I_{i_k} = \bigcup_{k=1}^{n}(I \cap I_{i_k})$，所以 $|I| \leqslant \sum_{k=1}^{n}|I \cap I_{i_k}|$，因此

$$|I| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |I \cap I_{i_k}| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |I_{i_k}| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < m^* I + \varepsilon .$$

由 $\varepsilon > 0$ 是任意的,有 $|I| \leqslant m^* I$,于是 $m^* I = |I|$.

(2) 设 I 为任意区间,对任意的 $\varepsilon > 0$,作闭区间 I_1 及 I_2,使 $I_1 \subset I \subset I_2$,且 $|I| < |I_1| + \varepsilon$,$|I_2| < |I| + \varepsilon$,这样 $|I_2| - \varepsilon < |I| < |I_1| + \varepsilon$,因此

$$|I| - \varepsilon < |I_1| = m^* I_1 \leqslant m^* I \leqslant m^* I_2 = |I_2| < |I| + \varepsilon .$$

由 $\varepsilon > 0$ 是任意的,$|I| \leqslant m^* I \leqslant |I|$,于是 $m^* I = |I|$.

3.2 可测集

外测度的优点是任何集合都有外测度,但外测度只有次可数可加性.事实上,在 $\mathbf{R}^n$ 中的确存在互不相交的一列集合 $\{E_i\}$,使得

$$m^* (\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) < \sum_{i=1}^{\infty} m^* E_i .$$

因此,若把外测度当做测度,则存在明显的缺陷,如果把外测度 m^* 的定义域加以限制,即设法在 $\mathbf{R}^n$ 中找出某一集合类 μ,在 μ 上 m^* 能够满足测度公理,这是可以做到的.

如何从 $\mathbf{R}^n$ 中挑出集合类 μ 呢?

μ 中的集合应该对可数并、交、差运算封闭,μ 应包括 $\mathbf{R}^n$ 及 $\mathbf{R}^n$ 中的所有有限开区间,而且对 μ 中一列互不相交的集合 $\{E_i\}$,应成立

$$m^* (\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m^* E_i . \tag{3.2.1}$$

若 $E \in \mu$,则对任何开区间 $I \subset \mathbf{R}^n$,应成立

$$m^* I = m^* (I \cap E) + m^* (I \cap CE) . \tag{3.2.2}$$

对于式(3.2.2),我们有下面的结果:

引理 1 设 $E \subset \mathbf{R}^n$,则式(3.2.2)对任何开区间 I 都成立的充分必要条件是对 $\mathbf{R}^n$ 中的任何点集 T 都有

$$m^* T = m^* (E \cap T) + m^* (CE \cap T) . \tag{3.2.3}$$

证明 充分性.若对任何点集 $T \subset \mathbf{R}^n$ 式(3.2.3)成立,则因 $I \subset \mathbf{R}^n$,取 $T = I$

时，式(3.2.3)也成立，此即对任何开区间 $I\subset\mathbb{R}^n$，式(3.2.2)成立.

必要性. 设 $E\subset\mathbb{R}^n$，T 为 $\mathbb{R}^n$ 中任意点集，由外测度定义，对任意的 $\varepsilon>0$，存在一列开区间，使得 $T\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i$，且 $\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|\leqslant m^*T+\varepsilon$. 由于

$$T\cap E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i\cap E=\bigcup_{i=1}^{\infty}(I_i\cap E),$$

$$T\cap CE\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i\cap CE=\bigcup_{i=1}^{\infty}(I_i\cap CE),$$

所以由外测度的单调性和次可数可加性，有

$$m^*(T\cap E)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}m^*(I_i\cap E),$$

$$m^*(T\cap CE)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}m^*(I_i\cap CE),$$

从而

$$\begin{aligned}m^*(T\cap E)+m^*(T\cap CE)&\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}m^*(I_i\cap E)+\sum_{i=1}^{\infty}m^*(I_i\cap CE)\\&=\sum_{i=1}^{\infty}[m^*(I_i\cap E)+m^*(I_i\cap CE)]\\&=\sum_{i=1}^{\infty}m^*I_i\text{①}\\&=\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|\\&\leqslant m^*T+\varepsilon.\end{aligned}$$

由 $\varepsilon>0$ 是任意的，有

$$m^*(T\cap E)+m^*(T\cap CE)\leqslant m^*T.$$

另一方面，由于

$$T=T\cap\mathbb{R}^n=T\cap(E\cup CE)=(T\cap E)\cup(T\cap CE),$$

有

$$\begin{aligned}m^*T&=m^*[(T\cap E)\cup(T\cap CE)]\\&\leqslant m^*(T\cap E)+m^*(T\cap CE).\end{aligned}$$

① 证必要性，对任何开区间 $I\subset\mathbb{R}^n$，式(3.2.2)成立.

综上，$m^*T = m^*(T\cap E)+m^*(T\cap CE)$.

由前面描述的如果一个集合 E 是可测的，它应满足式(3.2.2)，而由引理 1，式(3.2.2)与式(3.2.3)等价，下面我们用式(3.2.3)给出可测集的定义.

定义 3.2.1 设 E 为 $\mathbf{R}^n$ 中的点集，如果对任意点集 $T\subset\mathbf{R}^n$，都有

$$m^*T = m^*(T\cap E)+m^*(T\cap CE),$$

则称 E 为 Lebesgue 可测集，此时称 m^*E 为 E 的 Lebesgue 测度，简记为 mE.

这个定义是由卡拉西奥多里[①]给出的，式(3.2.3)称为 Caratheodory 条件.

Lebesgue 可测集简称 L 可测集，L 可测集全体记为 μ，若 $E\in\mu$，则称 E 是 L 可测的.

Caratheodory 条件有一个等价的叙述方式，即：

定理 3.2.1 集合 E 可测的充要条件是对任意的 $A\subset E$，$B\subset CE$，总有

$$m^*(A\cup B) = m^*A+m^*B.$$

证明 必要性. 设 E 可测，则 E 满足 Caratheodory 条件，取 $T = A\cup B$，则 $T\cap E=A$，$T\cap CE=B$，由 Caratheodory 条件，有

$$m^*(A\cup B) = m^*T = m^*(T\cap E)+m^*(T\cap CE) = m^*A+m^*B.$$

充分性. 设对任意的 $A\subset E$，$B\subset CE$，总有 $m^*(A\cup B) = m^*A+m^*B$，则对任意的 T，令 $A = T\cap E$，$B = T\cap CE$，则 $A\subset E$，$B\subset CE$，且

$$T = (T\cap E)\cup(T\cap CE) = A\cup B,$$

所以

$$m^*T = m^*(A\cup B) = m^*A+m^*B = m^*(T\cap E)+m^*(T\cap CE).$$

由 Caratheodory 条件知 E 可测.

定理 3.2.2 E 可测的充分必要条件是 CE 可测.

证明 设 E 可测，则对任意的 T，有

$$\begin{aligned} m^*T &= m^*(T\cap E)+m^*(T\cap CE) \\ &= m^*(T\cap CE)+m^*(T\cap C(CE)), \end{aligned}$$

所以 CE 可测.

设 CE 可测，则对任意的 T，有

① Caratheodory，1873—1950，希腊数学家.

$$m^* T = m^*(T \cap CE) + m^*(T \cap C(CE))$$
$$= m^*(T \cap CE) + m^*(T \cap E),$$

所以 E 可测.

定理 3.2.3 设 E_1, E_2 都可测,则 $E_1 \cup E_2$ 也可测,并且当 $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ 时,对于任意的 T 总有

$$m^*[T \cap (E_1 \cup E_2)] = m^*(T \cap E_1) + m^*(T \cap E_2) \tag{3.2.4}$$

证明 先证 $E_1 \cup E_2$ 可测,即要证对任何 T 都有

$$m^* T = m^*(T \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*(T \cap C(E_1 \cup E_2)), \tag{3.2.5}$$

因为 E_1 可测,所以对任何 T 有

$$m^* T = m^*(T \cap E_1) + m^*(T \cap CE_1), \tag{3.2.6}$$

又因为 E_2 可测,取 $T = T \cap CE_1$,则有

$$m^*(T \cap CE_1) = m^*[(T \cap CE_1) \cap E_2] + m^*[(T \cap CE_1) \cap CE_2],$$

这样由式(3.2.6)有

$$m^* T = m^*(T \cap E_1) + m^*[(T \cap CE_1) \cap E_2] + m^*[(T \cap CE_1) \cap CE_2]$$
$$= m^*(T \cap E_1) + m^*[(T \cap CE_1) \cap E_2] + m^*[T \cap C(E_1 \cup E_2)].$$

因为 E_1 可测,并且 $T \cap E_1 \subset E_1$, $(T \cap CE_1) \cap E_2 \subset CE_1$,所以由定理 3.2.1,有

$$m^*(T \cap E_1) + m^*[(T \cap CE_1) \cap E_2] = m^*[(T \cap E_1) \cup (T \cap CE_1 \cap E_2)]$$
$$= m^*[T \cap (E_1 \cup (CE_1 \cap E_2))]$$
$$= m^*[T \cap ((E_1 \cup CE_1) \cap (E_1 \cup E_2))]$$
$$= m^*[T \cap (\mathbf{R}^n \cap (E_1 \cup E_2))]$$
$$= m^*[T \cap (E_1 \cup E_2)],$$

因此,有

$$m^* T = m^*[T \cap (E_1 \cup E_2)] + m^*[T \cap C(E_1 \cup E_2)],$$

于是 $(E_1 \cup E_2)$ 可测.

其次证明式(3.2.4)成立. 当 $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ 时,因为 E_1 可测, $T \cap E_1 \subset E_1$, $T \cap E_2 \subset E_2 \subset C(E_1)$,由定理 3.2.1,有

$$m^*(T \cap (E_1 \cup E_2)) = m^*[(T \cap E_1) \cup (T \cap E_2)]$$

$$= m^*(T \cap E_1) + m^*(T \cap E_2).$$

推论 1 设 $E_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都可则，则 $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ 也可测，并且当 $E_i \cap E_j = \varnothing(i \neq j)$时，对任何集合 T 总有

$$m^*(T \cap (\bigcup_{i=1}^{n} E_i)) = \sum_{i=1}^{n} m^*(T \cap E_i).$$

定理 3.2.4 设 E_1，E_2 都可测，则 $E_1 \cap E_2$ 也可测.

证明 因为 $E_1 \cap E_2 = C(C(E_1 \cap E_2)) = C(CE_1 \cup CE_2)$，由定理 3.2.2 及定理 3.2.3，$E_1 \cap E_2$ 可测.

推论 2 设 $E_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都可测，则 $\bigcap_{i=1}^{n} E_i$ 也可测.

定理 3.2.5 设 E_1，E_2 都可测，则 $E_1 - E_2$ 也可测.

证明 因为 $E_1 - E_2 = E_1 \cap CE_2$，所以 $E_1 - E_2$ 可测.

定理 3.2.6 设 $E_i(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$ 是一列互不相交的可测集，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ 也是可测集，且

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} mE_i \tag{3.2.7}$$

证明 先证 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ 可测. 因为对任何 n，$\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ 可测，所以对任意的 T 总有

$$m^*T = m^*[T \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i] + m^*[T \cap C(\bigcup_{i=1}^{n} E_i)]$$

$$\geqslant m^*[T \cap (\bigcup_{i=1}^{n} E_i)] + m^*[T \cap C(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)]\ (C(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \subset C(\bigcup_{i=1}^{n} E_i))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m^*(T \cap E_i) + m^*[T \cap C(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)]\ (\text{推论 1}),$$

令 $n \to \infty$，有

$$m^*T \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} m^*(T \cap E_i) + m^*[T \cap C(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)] \tag{3.2.8}$$

$$\geqslant m^*[T \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)] + m^*[T \cap C(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)].$$

另一方面，由于 $T = (T \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)) \cup (T \cap C(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i))$，所以

$$m^*T \leqslant m^*[T \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)] + m^*[T \cap C(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)],$$

因此 $m^* T = m^*[T \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)] + m^*[T \cap C(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)]$，于是 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ 可测.

在式(3.2.8)中，令 $T = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$，由 $(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \cap E_i = E_i$，便有

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} m^* E_i = \sum_{i=1}^{\infty} mE_i,$$

而由外测度的性质

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m^* E_i = \sum_{i=1}^{\infty} mE_i,$$

因此

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} mE_i.$$

推论 3 设 $E_i (i = 1,2,\cdots,n,\cdots)$ 是一列可测集，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ 也是可测集.

证明 将 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ 表示成互不相交的可测集列 $\{S_i\}$ 的并集，只要设 $S_1 = E_1$，$S_n = E_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i (n=2,3,\cdots)$，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$，且 $S_i (i = 1,2,\cdots)$ 是一列互不相交的可测集. 由定理 3.2.6，有 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ 是可测集.

定理 3.2.7 设 $E_i (i = 1,2,\cdots)$ 是一列可测集，则 $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ 也是可测集.

证明 因为 $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = C(C(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i)) = C(\bigcup_{i=1}^{\infty} CE_i)$，所以 $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ 是可测集.

定理 3.2.8 设 $E_n (n = 1,2,\cdots)$ 是一单调增加的可测集列，则 $\lim_{n\to\infty} E_n$ 可测，且 $m \lim_{n\to\infty} E_n = \lim_{n\to\infty} mE_n$.

证明 $E = E_1 \cup (E_2 - E_1) \cup (E_3 - E_2) \cup \cdots \cup (E_n - E_{n-1}) \cup \cdots = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n - E_{n-1}) (E_0 = \varnothing)$，并且 $(E_i - E_{i-1}) \cap (E_j - E_{j-1}) = \varnothing (i \neq j)$，因此由定理 3.2.6[式(3.2.7)]，有

$$\begin{aligned} mE &= m[\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n - E_{n-1})] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n - E_{n-1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m(E_i - E_{i-1}) \end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty} m\left[\bigcup_{i=1}^{n} (E_i - E_{i-1})\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty} mE_n .$$

定理 3.2.9 设 $E_n(n=1,2,\cdots)$ 是单调减少的可测集列，则 $\lim_{n\to\infty} E_n$ 可测，若存在 n_0，使 $mE_{n_0} < \infty$，则有

$$m \lim_{n\to\infty} E_n = \lim_{n\to\infty} mE_n.$$

证明 由于 $E_n(n=1,2,\cdots)$ 是单调减少的可测集列，所以 $\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$，因而 $\lim_{n\to\infty} E_n$ 可测，设 $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$.

令 $S_k = E_{n_0} - E_{n_0+k}(k=1,2,\cdots)$，则 $S_k(k=1,2,\cdots)$ 是单调增加集列，由定理 3.2.8，$\lim_{k\to\infty} S_k$ 可测，且 $m \lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} mS_k$.

注意到 $mS_k = m(E_{n_0} - E_{n_0+k}) = mE_{n_0} - mE_{n_0+k}(E_{n_0+k} \subset E_{n_0})$，$S_k(k=1,2,\cdots)$ 是单调增加集列，所以

$$\lim_{k\to\infty} S_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_{n_0} - E_{n_0+k}) = E_{n_0} - \bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_0+k} .$$

所以

$$m \lim_{k\to\infty} S_k = m(E_{n_0} - \bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_0+k}) = mE_{n_0} - m(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_0+k})(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_0+k} \subset E_{n_0}),$$

从而

$$\begin{aligned} mE_{n_0} - m(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_0+k}) &= m \lim_{k\to\infty} S_k \\ &= \lim_{k\to\infty} mS_k \\ &= \lim_{k\to\infty}(mE_{n_0} - mE_{n_0+k}) \\ &= mE_{n_0} - \lim_{k\to\infty} mE_{n_0+k} , \end{aligned}$$

因此

$$m(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_0+k}) = \lim_{k\to\infty} mE_{n_0+k} ,$$

而

$$\lim_{k\to\infty} mE_{n_0+k} = \lim_{k\to\infty} mE_k ,$$
$$\bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_0+k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k .$$

于是

$$m(\lim_{k\to\infty}E_k) = m(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k) = \lim_{k\to\infty}mE_k .$$

本定理中的存在 n_0 使 $mE_{n_0} < \infty$ 的条件是不可缺少的. 例如,设 $E_n = (n, +\infty)(n = 1,2,\cdots)$,则 $\{E_n\}$ 是单调减少集列, $E = \bigcap_{n=1}^{\infty}(n, +\infty) = \varnothing$,所以 $mE = 0$,但是 $mE_n = m(n, +\infty) = \infty$,所以 $\lim_{n\to\infty}mE_n = \infty \neq 0 = mE$. 因此

$$m\lim_{n\to\infty}E_n = m(\bigcap_{n=1}^{\infty}(n, +\infty)) = 0 \neq \infty = \lim_{n\to\infty}mE_n .$$

定理 3.2.10 设 $E_i(i = 1,2,\cdots)$ 是可测集列,若 $\lim_{n\to\infty}E_n$ 存在,则极限集也可测;若有 n_0 ,使 $m(\bigcup_{n=n_0}^{\infty}E_n) < \infty$,则

$$m(\lim_{n\to\infty}E_n) = \lim_{n\to\infty}mE_n .$$

证明 由于 $\overline{\lim_{n\to\infty}}E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}E_m$, $\underline{\lim_{n\to\infty}}E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}E_m$,所以由定理 3.2.6 和定理 3.2.7 知 $\overline{\lim_{n\to\infty}}E_n$ 与 $\underline{\lim_{n\to\infty}}E_n$ 都可测,因此若 $\lim_{n\to\infty}E_n$ 存在,则必可测.

设 $S_n = \bigcup_{m=n}^{\infty}E_m$,则 $\{S_n\}$ 是单调下降的可测集列,由定理的条件知,当 $n \geqslant n_0$ 时, $mS_n < \infty$,于是由定理 3.2.9 知

$$\lim_{n\to\infty}mS_n = m(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}E_m) = m\overline{\lim_{n\to\infty}}E_n = m\lim_{n\to\infty}E_n ,$$

又 $E_n \subset S_n$,所以 $mE_n \leqslant mS_n$,因此

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}mE_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}mS_n = \lim_{n\to\infty}mS_n = m\lim_{n\to\infty}E_n .$$

另一方面,若设 $F_n = \bigcap_{m=n}^{\infty}E_m$,则 $\{F_n\}$ 是单调增加的可测集列,由定理 3.2.8 知

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}mF_n &= m\lim_{n\to\infty}F_n \\ &= m(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}E_m) \\ &= m\underline{\lim_{n\to\infty}}E_n \\ &= m\lim_{n\to\infty}E_n .\end{aligned}$$

又因为 $F_n \subset E_n$,所以 $mE_n \geqslant mF_n$,因此

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}mE_n \geqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}mF_n = \lim_{n\to\infty}mF_n = m\lim_{n\to\infty}E_n .$$

从而 $\overline{\lim_{n\to\infty}}mE_n \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}mE_n$,而 $\underline{\lim_{n\to\infty}}mE_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}mE_n$,这样

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} mE_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} mE_n = \lim_{n\to\infty} mE_n ,$$

于是

$$m \lim_{n\to\infty} E_n = \lim_{n\to\infty} mE_n .$$

3.3　可测集类

在前一节中，我们给出了可测集的概念，并讨论了可测集关于并、交、差基本运算的一些性质，也讨论了可测集合列极限运算的性质. 但我们还不知道一般常见的点集究竟有哪些是可测的，可测集的结构又是什么样的，本节就来讨论这些问题.

1. 开集的可测性

定理 3.3.1

(1) 若 $m^* E = 0$，则 E 可测，此时称 E 为零测度集；

(2) 零测度集的任何子集仍为零测度集；

(3) 有限个或可数多个零测度集的并集仍为零测度集.

证明　(1) 若 $m^* E = 0$，对任意的点集 T，$m^*(T \cap E) \leqslant m^* E = 0$，所以

$$m^*(T \cap E) = 0 ,$$

从而

$$m^*(T\cap E)+m^*(T\cap CE)=m^*(T\cap CE)\leqslant m^* T(T\cap CE\subset T).$$

另一方面，

$$\begin{aligned} m^* T &= m^*[T \cap (CE \cup E)] \\ &= m^*[(T \cap E) \cup (T \cap CE)] \\ &\leqslant m^*(T \cap E) + m^*(T \cap CE) , \end{aligned}$$

这样

$$m^* T = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap CE) .$$

由 Caratheodory 条件，E 是可测集.

(2) 设 E 是零测度集，A 是 E 的任一子集，则由 $A \subset E$ 有 $m^* A \leqslant m^* E$，所以 $m^* A = 0$，A 是零测度集.

(3) 设 $\{E_i\}$ 是至多可数多个零测度集，$E=\bigcup\limits_i E_i$，由外测度的次可数可加性，$m^*E=m^*(\bigcup\limits_i E_i)\leqslant\sum\limits_i m^*E_i=0$，所以 $m^*E=0$，E 是零测度集.

定理 3.3.2 $\mathbf{R}^n$ 中任何开区间 I 都是可测的，并且 $mI=|I|$.

证明 先证明关于外测度的一个重要结果：

设 A，B 是 $\mathbf{R}^n$ 中的两个点集，若 $\rho(A,B)>0$，则

$$m^*(A\cup B)=m^*A+m^*B.$$

由外测度的性质，有 $m^*(A\cup B)\leqslant m^*A+m^*B$. 以下证明 $m^*(A\cup B)\geqslant m^*A+m^*B$. 若 $m^*(A\cup B)=\infty$，则结论成立. 设 $m^*(A\cup B)<\infty$，对任意的 $\varepsilon>0$，存在一列开区间 $\{I_i\}$，使 $A\cup B\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}I_i$ 且

$$\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|<m^*(A\cup B)+\varepsilon.$$

设 $\rho(A,B)=d$，则 $d>0$，逐个考察这些开区间 I_i，如果 I_i 中只含有 A 中点或只含有 B 中点，则 I_i 保留. 若不然，因为 $m^*(A\cup B)<\infty$，可以将 I_i 分解成互不相交的有限多个，比如说 m_i 个直径都小于 d 的小开区间 $K_{i,1},K_{i,2},\cdots,K_{i,m_i}$. 显然 $|I_i|=\sum\limits_{t=1}^{m_i}|K_{i,t}|$.

因为 $K_{i,1},K_{i,2},\cdots,K_{i,m_i}$ 的 $2nm_i$ 个边界都是 $n-1$ 维空间 $\mathbf{R}^{n-1}$ 中的点，因而在 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 都是零测度集，对每一个边界，因为是 $\mathbf{R}^{n-1}$ 中的闭集，且由于 $K_{i,1}$，$K_{i,2},\cdots,K_{i,m_i}$ 的直径都小于 d，所以它们的每个边界 $F_{i,1},F_{i,2},\cdots,F_{i,2nm_i}$ 或者只含有 A 中点，或者只含有 B 中点，因而有 $\mathbf{R}^n$ 中开区间 $L_{i,s}$ 使 $F_{i,s}\subset L_{i,s}$，且 $L_{i,s}$ 中只含有 A 中点或只含有 B 中点，还满足 $|L_{i,s}|<\frac{\varepsilon}{2nm_i\cdot 2^i}(s=1,2,\cdots,2nm_i)$.

这样覆盖 $K_{i,1},K_{i,2},\cdots,K_{i,m_i}$ 的 $2nm_i$ 个边界的 $2nm_i$ 个开区间 $L_{i,1},L_{i,2},\cdots$，$L_{i,2nm_i}$ 满足 $\sum\limits_{s=1}^{2nm_i}|L_{i,s}|<\frac{\varepsilon}{2^i}$，将所有保留下来的 I_i、改造某些 I_i 而得到的开区间 $K_{i,s}$，以及覆盖 $K_{i,s}$ 边界的 $L_{i,s}$ 全部取来，得到可数多个开区间，记为 $\{J_m\}$，则

$$A\cup B\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\subset\bigcup_{m=1}^{\infty}J_m,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}|J_m|=\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^i}<m^*(A\cup B)+2\varepsilon.$$

对于开区间列 $\{J_m\}$，它们中的每一个或者只含有 A 中点，或者只含有 B 中点，或者直径小于 d，因而它们中的每一个都不能即含有 A 中点又含有 B 中点.

将 $\{J_m\}$ 分为两组：

(1) $J_{i_1}, J_{i_2}, \cdots, \bigcup_{k=1}^{\infty} J_{i_k} \supset A$；

(2) $J_{l_1}, J_{l_2}, \cdots, \bigcup_{k=1}^{\infty} J_{l_k} \supset B$.

则

$$\begin{aligned} m^* A + m^* B &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |J_{i_k}| + \sum_{k=1}^{\infty} |J_{l_k}| \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} |J_m| \\ &< m^*(A \cup B) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，所以 $m^* A + m^* B \leqslant m^*(A \cup B)$.

综上，$m^*(A \cup B) = m^* A + m^* B$.

接下来证明 I 可测，并且 $mI = |I|$.

设 $I = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid c_i < x_i < d_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$，显然对任意的 $T \subset \mathbb{R}^n$，恒有

$$m^* T \leqslant m^*(T \cap I) + m^*(T \cap CI),$$

欲证 I 可测，只须证明

$$m^* T \geqslant m^*(T \cap I) + m^*(T \cap CI).$$

令 $I^{(k)} = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid c_i + \frac{1}{k} < x_i < d_i - \frac{1}{k}, i = 1, 2, \cdots, n\}(k = 1, 2, \cdots)$，则 $I^{(k)} \subset I(k = 1, 2, \cdots)$，且当 k 充分大时，$I^{(k)} \neq \varnothing$，$\rho(I^k, CI) = \frac{1}{k} > 0$.

因为 $I^{(k)} \cap T \subset I^{(k)}$，$CI \cap T \subset CI$，从而 $\rho(I^{(k)} \cap T, CI \cap T) > 0$.

由上面证明关于外测度的重要结果知

$$m^* T \geqslant m^*[(I^{(k)} \cup CI) \cap T] = m^*(I^{(k)} \cap T) + m^*(CI \cap T).$$

如能证明 $\lim_{k \to \infty} m^*(I^{(k)} \cap T) = m^*(I \cap T)$，则结果得证.

显然 $m^*(I - I^{(k)}) \to 0(k \to \infty)$，因为

$$T \cap I = T \cap [(I - I^{(k)}) \cup I^{(k)}]$$

$$= [T \cap (I - I^{(k)})] \cup (T \cap I^{(k)}),$$

所以

$$m^*(T \cap I) \leqslant m^*[(I - I^{(k)}) \cap T] + m^*(I^{(k)} \cap T),$$

即

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant m^*(T \cap I) - m^*(I^{(k)} \cap T) \\ &\leqslant m^*[(I - I^{(k)}) \cap T] \\ &\leqslant m^*(I - I^{(k)}) \to 0 (k \to \infty). \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{k \to \infty} m^*(I^{(k)} \cap T) = m^*(T \cap I).$$

于是 I 可测,且 $mI = m^* I = |I|$.

该定理是一个基本定理,正是由于该定理,我们所定义的测度才是 $\mathbf{R}^n$ 中开区间体积的推广. 这也是在本章开始所说的测度公理的正则性. 有了这条定理,才能推出开集可测,进而推出 $\mathbf{R}^n$ 中许多类型点集的可测性. 这个定理叙述简单,结果简明,然而证明不能说很复杂,却可以说很啰唆,在参考书目[1]中给出一维情形和二维情形的证明,而在参考书目[3]中给出了一个一般性的证明,但用到了外测度的性质:若 $\rho(A,B) > 0$ (A , B 的距离),则 $m^*(A \cup B) = m^* A + m^* B$,而这一性质的证明也是在一维情形给出的.

有了这个定理,则对于 $\mathbf{R}^n$ 中的任何区间 J (闭的或半开半闭的)都是可测的,且 $mJ = |J|$.

这是因为 $\mathbf{R}^n$ 中的任何区间 J 与相应的开区间 I 至多相差 $2n$ 个 $\mathbf{R}^n$ 中的子集,这 $2n$ 个 $\mathbf{R}^n$ 中的子集是 $\mathbf{R}^{n-1}$ 中的区间,在 $\mathbf{R}^n$ 中,体积为零. 因而这 $2n$ 个 $\mathbf{R}^n$ 中的子集是零测集,即 $J = I \cup I_0$. 其中 I_0 是零测集,因而可测,所以 J 可测,因此 $mJ = m^* J = |J|$.

定理 3.3.3 $\mathbf{R}^n$ 中的开集、闭集都是可测集.

为证明该定理,先给出一个引理.

引理 1 $\mathbf{R}^n (n \geqslant 2)$ 中的非空开集 G 都可以表示成可数多个互不相交的左开右闭的区间的并,即 $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$.

$$J_i = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid c_j^{(i)} < x_j \leqslant d_j^{(i)}, j = 1, 2, \cdots, n\} (i = 1, 2, \cdots),$$

且

$$J_i \cap J_j = \varnothing (i \neq j).$$

证明 对每一个 $k \in \mathbf{N}^+$ ，$\mathbf{R}^n$ 都可以分解成可数多个形如

$$\left\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid \frac{m_i}{2^k} < x_i \leqslant \frac{m_i + 1}{2^k}, i = 1, 2, \cdots, n\right\} (m_i \text{ 为整数}) \quad (3.3.1)$$

的互不相交的左开右闭的区间.

设 $k = 1$ 时,上述这些区间中完全包含在 G 内的那些是 $I_1^{(1)}, I_2^{(1)}, \cdots$ (有限个或可数多个). 对于 $k > 1$,用 $I_1^{(k)}, I_2^{(k)}, \cdots$ 表示上述那些区间中完全被 G 包含,但不与任何 $I_i^{(l)} (l \leqslant k-1)$ 相交的区间 $I_j^{(k)}$ (有限个或可数多个). 这样我们就得到可数多个左开右闭的区间 $I_j^{(k)}$ ，$1 \leqslant j < t_k \leqslant +\infty$ ($k = 1, 2, \cdots$). 显然它们是互不相交的, $\bigcup\limits_{k,j} I_j^{(k)} \subset G$. 下证 $G = \bigcup\limits_{k,j} I_j^{(k)}$.

若 $x \in G$,因 G 是开集,有 $\delta > 0$,使 $U(x, \delta) \subset G$. 于是当 k 充分大时,式(3.3.1)中那些区间中包含 x 的那个必完全包含在 G 内,从而 $x \in \bigcup\limits_{k,j} I_j^{(k)}$. 这样 $G = \bigcup\limits_{k,j} I_j^{(k)}$. 引理得证.

$\mathbf{R}$ 中的开集可以表示成有限个或可数多个互不相交的开区间的并, $\mathbf{R}^n (n \geqslant 2)$ 中的开集可以表示成可数多个互不相交的左开右闭区间的并,而区间是可测的,所以开集是可测的,而闭集是开集的余集,因而闭集也可测. 定理得证.

由开集和闭集是可测的,可以推出 G_δ 型集和 F_σ 型集是可测的.

2. Lebesgue 可测集的结构

定义 3.3.1 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中一些集合所成的集类. 如果满足条件:

(1) $\mathbf{R}^n \in \Omega$;

(2) 当 $A \in \Omega$ 时,有 $CA \in \Omega$;

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是 Ω 中的一列集合,则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \Omega$,

则称 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个 σ 代数.

不难发现,关于 σ 代数有以下结果:

若 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 上的 σ 代数,则

(1) $\varnothing \in \Omega$;

(2) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是 Ω 中的一列集合，则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \Omega$；

(3) $\mathbf{R}^n$ 中的一切子集所成的集类 $P(\mathbf{R}^n)$ 是 σ 代数；

(4) 如果 $\{\Omega_\alpha \mid \Omega_\alpha$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的 σ 代数，$\alpha \in I$，I 是指标集$\}$，则 $\bigcap_{\alpha\in I} \Omega_\alpha$ 也是 $\mathbf{R}^n$ 上的 σ 代数.

定义 3.3.2 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中某些子集所成的集类，称 $\mathbf{R}^n$ 上包含 Ω 的 σ 代数的交集为由 Ω 生成的 σ 代数，记为 $F(\Omega)$.

由上面的讨论知，$F(\Omega)$ 是 σ 代数，而且是包含 Ω 的最小 σ 代数，即若有 $\mathbf{R}^n$ 上的 σ 代数 M，使 $\Omega \subset M$，则 $F(\Omega) \subset M$.

定义 3.3.3 设 $K = \{G \mid G \subset \mathbf{R}^n, G$ 是开集$\}$，即 K 是 $\mathbf{R}^n$ 中所有开集所成的集类. 记由 K 生成的 σ 代数为 B，即 $B = F(K)$，称 B 中的集合为博雷尔(Borel)集.

不难看出，前面定义的 G_δ 型集和 F_δ 型集是 Borel 集.

定理 3.3.4 凡 Borel 集都是 Lebesgue 可测集.

证明 设 μ 是 $\mathbf{R}^n$ 中 Lebesgue 可测集全体所成的集类.

下面证明 μ 是 σ 代数. 因为对任何 $T \subset \mathbf{R}^n$，

$$m^* T = m^*(T \cap \mathbf{R}^n) = m^*(T \cap \mathbf{R}^n) + m^*(T \cap C\mathbf{R}^n),$$

所以 $\mathbf{R}^n$ 是可测集，因而 $\mathbf{R}^n \in \mu$. 若 $A \subset \mathbf{R}^n$，$A \in \mu$，即 A 是可测集，则 CA 也是可测集，所以 $CA \in \mu$.

若 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是 μ 中一列集合，因为 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 是可测集，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mu$. 因而由定义 3.3.1 知 μ 是 σ 代数.

由于开集是 Lebesgue 可测集，所以 $\mathbf{R}^n$ 中所有开集所成的集类 $K \subset \mu$，而 Borel 集类 B 是包含 K 的最小 σ 代数，因此 $B \subset \mu$，从而 Borel 集都是 Lebesgue 可测集.

很自然地会提出这样的问题：既然 Borel 集都是 Lebesgue 可测集，那么 Lebesgue 可测集是否都是 Borel 集呢？回答是否定的. 因为有不是 Borel 集的 Lebesgue 可测集，而且这样的集是相当多的.

定理 3.3.5 设 E 是任一可测集，则一定存在 G_δ 型集 G，使 $E \subset G$，且 $m(G-E) = 0$.

证明 (1) 先证对任意的 $\varepsilon > 0$，存在开集 G，使 $E \subset G$，且 $m(G-E) < \varepsilon$.

(i) 若 $mE < \infty$，由测度定义，有一列开区间 $\{I_n\}$，使 $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$，且 $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < mE + \varepsilon$.

令 $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$，则 G 是开集，$E \subset G$，且 $mE \leqslant mG \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} mI_i = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < mE + \varepsilon$.

所以 $mG - mE < \varepsilon$，由 $G = (G-E) \cup E$，有 $mG = m(G-E) + mE$，因此 $m(G-E) < \varepsilon$.

(ii) 若 $mE = \infty$. 则 E 是无界集，但 E 总可以表示成可数多个互不相交的有界可测集的并集，$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$，且 $mE_n < \infty (n = 1,2,\cdots)$. 对每个 E_n 应用(i)的结果，有开集 G_n，使 $E_n \subset G_n$，且 $m(G_n - E_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$，令 $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$，则 G 是开集，$E \subset G$. 由于

$$G - E = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n - \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n - E_n),$$

则

$$m(G-E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(G_n - E_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

(2) 由(1)的结果，依次取 $\varepsilon_n = \frac{1}{n} (n = 1,2,\cdots)$，存在开集 G_n，使 $E \subset G_n$，且 $m(G_n - E) < \frac{1}{n}$.

令 $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$，则 G 是 G_δ 型集，$E \subset G$，且

$$m(G-E) \leqslant m(G_n - E) < \frac{1}{n} (n = 1,2,\cdots),$$

于是 $m(G-E) = 0$，定理得证.

定理 3.3.6 设 E 是任一可测集，则一定存在 F_σ 型集 F，使 $F \subset E$，且 $m(E-F) = 0$.

证明 E 是可测集，则 CE 是可测集，由定理 3.3.5 可知存在 G_δ 型集 G，使 $CE \subset G$，且 $m(G - CE) = 0$.

令 $F = CG$，则 F 是 F_σ 型集，由 $CE \subset G$，有 $CG \subset E$，即 $F \subset E$，并且

$$\begin{aligned} m(E-F) &= m(E \cap CF) \\ &= m(E \cap G) \\ &= m[G \cap C(CE)] \\ &= m(G - CE) \\ &= 0 . \end{aligned}$$

定理得证.

定理 3.3.7 任何 Lebesgue 可测集都可以表示成 Borel 集与一个零测集之差,也可以表示成 Borel 集与一个零测集之并.

证明 设 E 是 Lebesgue 可测集,由定理 3.3.5 有 G_δ 型集 $G \supset E$,使 $G-E$ 是零测集. 由定理 3.3.6 有 F_σ 型集 $F \subset E$,使 $E-F$ 是零测集,因此$E=G-(G-E)$,又有 $E=F\cup(E-F)$.

这表明,E 可以是一个 Borel 集和一个零测集之差,也可以是一个 Borel 集和一个零测集之并.

定理 3.3.5、定理 3.3.6 和定理 3.3.7 说明了 Lebesgue 可测集与 Borel 集的关系,刻画了 Lebesgue 可测集的结构.

例 3.3.1 设 $E \subset \mathbf{R}^n$,若对任意的 $\varepsilon > 0$,存在可测集 G,使 $E \subset G$,且 $m^*(G-E)<\varepsilon$,则 E 是可测集.

证明 对任何 $k \in \mathbf{N}^+$,由所设条件,存在可测集 G_k,使 $E \subset G_k$,且 $m^*(G_k - E) < \dfrac{1}{k}$.

令 $G = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_k$,则 G 是可测集,因为 $m^*(G-E) \leqslant m^*(G_k - E) < \dfrac{1}{k}(k = 1, 2,\cdots)$,所以 $m^*(G-E) = 0$,$G-E$ 是零测集,因而可测.

这样 $E = G-(G-E)$ 是可测集.

例 3.3.2 设 $E \subset \mathbf{R}^n$,则存在 G_δ 型集 $G \subset \mathbf{R}^n$,使得 $E \subset G$ 且 $mG = m^*E$.

证明 若 $m^*E = \infty$,则令 $G = \mathbf{R}^n$,命题得证.

若 $m^*E < \infty$,对任何 $k \in \mathbf{N}^+$,由外测度定义,有开区间列 $\{I_{k,i}\}$,使 $E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_{k,i}$,且 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |I_{k,i}| \leqslant m^*E + \dfrac{1}{k}$,设 $G_k = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_{k,i}$,则有 $mG_k = m^*G_k \leqslant$

$\sum_{i=1}^{\infty}|I_{k,i}|< m^* E+\frac{1}{k}$.

令 $G=\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$,则 $E\subset G$, G 是 G_δ 型集. 由于对任何 $k\in \mathbf{N}^+$,有

$$m^* E\leqslant mG\leqslant mG_k< m^* E+\frac{1}{k}(k=1,2,\cdots) ,$$

所以

$$m^* E\leqslant mG\leqslant m^* E ,$$

于是 $mG=m^* E$,命题得证.

例 3.3.3 Cantor 集 P 的测度为零.

证明 设 G 是从 $[0,1]$ 中去掉的那些开区间的并集,即 $G=\bigcup_{n=1} G_n$. 其中 G_n 是 2^{n-1} 个长度为 $\frac{1}{3^n}$ 的开区间,所以 $mG_n=\frac{2^{n-1}}{3^n}$. 由各 G_n 互不相交,有

$$mG=\sum_{n=1}^{\infty} mG_n=\sum_{n=1}\frac{2^{n-1}}{3^n}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=1 .$$

而 $P=[0,1]-G$ 是闭集,所以可测. $P\cap G=\varnothing$, $[0,1]=G\cup P$,有 $m[0,1]=mG+mP$,这样 $mP=0$.

例 3.3.4 直线上所有可测集合作成的集类 μ 的基数等于直线上所有子集作成的集类 $P(\mathbf{R})$ 的基数.

证明 设 $E\in\mu$,则 $E\in P(\mathbf{R})$,所以 $\mu\subset P(\mathbf{R})$,因此 $\overline{\overline{\mu}}\leqslant\overline{\overline{P(\mathbf{R})}}$.

另一方面,考察 Cantor 集 P ,由 $mP=0$ 可知 P 是零测度集,从而 P 的任何子集是零测度集,因而可测. 设 $P(P)$ 是 Cantor 集的所有子集作成的集合类,因为 $\overline{\overline{P}}=c$,则 $\overline{\overline{P(P)}}=2^c=\overline{\overline{P(\mathbf{R})}}$. 而 $P(P)\subset\mu$,所以 $\overline{\overline{P(P)}}\leqslant\overline{\overline{\mu}}$. 这样 $\overline{\overline{\mu}}\leqslant\overline{\overline{P(\mathbf{R})}}=\overline{\overline{P(P)}}\leqslant\overline{\overline{\mu}}$,于是 $\overline{\overline{\mu}}=\overline{\overline{P(\mathbf{R})}}=2^c$.

例 3.3.5 直线上所有 Borel 集合作成的集类 B 的基数是连续基数 c .

证明 对于直线 $\mathbf{R}$ 中的任一开区间 $(a,b)(-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty)$ 都有有理数列 $\{r_n^a\}$ 及 $\{r_n^b\}$,使 $r_n^a\to a(n\to\infty)$, $r_n^b\to b(n\to\infty)$. 这样 (a,b) 对应有理数集 $\mathbf{Q}$ 的一个子集 $\{r_n^a\}\cup\{r_n^b\}$.

对于直线 $\mathbf{R}$ 中的任一开集 G , G 可以表示成至多可数个互不相交的开区间的

并集，$G=\bigcup_i(\alpha_i,\beta_i)$．

因此 G 对应 $\bigcup_i(\{r_n^{\alpha_i}\}\cup\{r_n^{\beta_i}\})$，这也是有理数集 $\mathbf{Q}$ 的一个子集．所以，直线上的开集全体 K 与有理数集 $\mathbf{Q}$ 的子集全体 $P(\mathbf{Q})$ 的某个子集 $P_1(\mathbf{Q})$ 对等．

因为 Borel 集是从开集出发经过取余集，作可数交、可数并等过程而得到的集合，而 $P_1(\mathbf{Q})$ 中的集经过取余集，作可数交、可数并等手续而作出的集还是有理数集的子集，也就是说每一个 Borel 集对应一个有理数集 $\mathbf{Q}$ 的子集．

这样 Borel 集类 B 与有理数集 $\mathbf{Q}$ 的幂集 $P(\mathbf{Q})$ 的某个子集 $P_2(\mathbf{Q})$ 对等．因此

$$\overline{\overline{B}}\leqslant 2^a=c\,.$$

另一方面，$\mathbf{R}$ 中每一个点 x 都是 Borel 集，因此 $\mathbf{R}$ 对等于 Borel 集类 B 的一个子集，即 $c=\overline{\overline{\mathbf{R}}}\leqslant\overline{\overline{\mathrm{B}}}$，从而 $\overline{\overline{B}}=c$．

3.4　不可测集的例

我们讨论点集的测度，到现在讨论了可测集的概念和性质．自然要问是否有不可测集存在？本节我们给出一个直线上不可测集的例子．

定义 3.4.1　设 $E\subset\mathbf{R}$，h 为实数，作映射 $T_h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，使得对于 $x\in E$，令 $T_h:x\to x+h$，$T_hE=\{T_hx\mid x\in E\}$，称 T_hE 为 E 的 h 平移变换．

显然当 E 为区间时，T_hE 也为区间，而且 $mE=m(T_hE)$．

定理 3.4.1　对任何集 $E\subset\mathbf{R}$，具有 $m^*E=m^*(T_hE)$，且当 E 是 L 可测时，T_hE 也是 L 可测的．

证明　设 $\{I_i\}$ 是一列开区间，$E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i$，那么 $\{T_hI_i\}$ 也是一列开区间，且 $T_hE\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}(T_hI_i)$，所以

$$m^*E=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|\;\middle|\;E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i\right\}\geqslant m^*(T_hE)\,.$$

另一方面，由 $T_{(-h)}(T_hE)=E$，结合上面的考虑方法，有

$$m^*(T_hE)\geqslant m^*(T_{(-h)}(T_hE))=m^*E\,,$$

因此

$$m^*E=m^*(T_hE)\,.$$

如果 E 为 L 可测的，则对任何 $T \subset \mathbf{R}$，有

$$m^* T = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap CE).$$

由于 $T_h(T \cap E) = T_h T \cap T_h E$，$T_h(T \cap CE) = T_h T \cap T_h(CE)$，及 $C(T_h E) = T_h(CE)$，因此

$$\begin{aligned} m^* T_h T &= m^* T_h(T \cap E) + m^* T_h(T \cap CE) \\ &= m^*(T_h T \cap T_h E) + m^*[T_h T \cap C(T_h E)]. \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

若在式(3.4.1)中用 $T_{(-h)} T$ 代替 T，则

$$m^* T = m^*(T \cap T_h E) + m^*[T \cap C(T_h E)],$$

因而 $T_h E$ 是 L 可测的. 定理得证.

定理 3.4.1 说明 Lebesgue 测度具有平移不变性.

命题 1 设 $E \subset \mathbf{R}$，$mE > 0$，$\alpha \in (0,1)$，则存在开区间 I，使 $m(E \cap I) > \alpha m I$.

证明 由外测度定义，对任意的 $\varepsilon > 0$，存在开集 G，使得 $E \subset G$，且 $mG < mE + \varepsilon$.

而 $mG = \alpha mG + (1-\alpha) mG$，若取 $\varepsilon = (1-\alpha) mE$，则

$$\alpha mG + (1-\alpha) mG < mE + (1-\alpha) mE.$$

因为

$$(1-\alpha) mG \geqslant (1-\alpha) mE,$$

所以

$$\alpha mG < mE. \tag{3.4.2}$$

由直线上开集的结构，设 $G = \bigcup_k I_k$，其中各 I_k 为互不相交的开区间，那么必有某个 I_k 使 $m(E \cap I_k) > \alpha m I_k$. 如若不然，对每个 $k \in \mathbf{N}^+$，都有 $m(E \cap I_k) \leqslant \alpha m I_k$，则

$$\begin{aligned} mE &= m(E \cap G) \\ &= m\Big(\bigcup_k (E \cap I_k)\Big) \\ &= \sum_k m(E \cap I_k) \\ &\leqslant \sum_k \alpha m I_k \\ &= \alpha mG. \end{aligned}$$

这与式(3.4.2)矛盾.命题得证.

命题 2　设 $E\subset\mathbf{R}$,$mE>0$,令 $\Delta(E)=\{x-y\mid x,y\in E\}$,则 $\Delta(E)$ 包含一个关于原点对称的开区间 J .

证明　应用命题 1,有开区间 I ,使

$$m(E\cap I)>\frac{3}{4}mI\ .$$

令 $J=\left(-\frac{mI}{2},\frac{mI}{2}\right)$,往证 J 满足命题结果.

事实上,J 是关于原点对称的区间.任取 $z\in J$,只须证明 $z\in\Delta(E)$. $z\in J$,则 $|z|<\frac{1}{2}mI$.用 $A+z=T_zA$ 表示集 A 的 z 平移,那么有

$$(E\cap I)\cup[(E\cap I)+z]\subset I\cup(I+z)\ .$$

因为 $|z|<\frac{1}{2}mI$,则 $I\cap(I+z)\neq\varnothing$,此时注意到

$$m[I\cup(I+z)]\leqslant mI+|z|<\frac{3}{2}mI\ ,$$

便有

$$m\{(E\cap I)\cup[(E\cap I)+z]\}<\frac{3}{2}mI\ . \tag{3.4.3}$$

因而 $(E\cap I)\cap[(E\cap I)+z]\neq\varnothing$,如若不然,则有

$$\begin{aligned}m\{(E\cap I)\cup[(E\cap I)+z]\}&=m(E\cap I)+m[(E\cap I)+z]\\&=2m(E\cap I)\\&>2\cdot\frac{3}{4}mI\\&=\frac{3}{2}mI\ ,\end{aligned}$$

这与式(3.4.3)矛盾.

于是可取一点 $x\in(E\cap I)\cap[(E\cap I)+z]$.从而 $x\in E$,而且可以写成 $x=y+z$,其中 $y\in E\cap I\subset E$,这样就有

$$z=x-y\ ,\ x,y\in E\ ,$$

即 $z\in\Delta(E)$,因而 $J\subset\Delta(E)$.命题得证.

定理 3.4.2　一维不可测集是存在的.

证明　设 $\mathbf{Q}$ 是有理数集,利用 $\mathbf{Q}$ 将 $\mathbf{R}$ 中的点分类,当 $x-y\in\mathbf{Q}$ 时认为 x,y 属于同一等价类,这样,$\mathbf{R}$ 被分成等价类,并且每两个不同的等价类互不相交.其实,设 E_x ,E_y 是不同的等价类,它们的代表元分别为 x 和 y ($x\in E_x$,$y\in E_y$),如果有公共元 $z\in E_x\cap E_y$,则

$$x-y=x-z+z-y\in\mathbf{Q},$$

于是将有 $x,y\in E_y$ 且 $x,y\in E_x$,即 E_x 与 E_y 是同一个等价类,矛盾.由 Zermelo 选择公理,从每个等价类中取一点构成一个集合 E ,那么,E 是不可测的.

首先,注意 $\Delta(E)=\{x-y\mid x,y\in E\}$ 显然包含原点,且由 E 的做法除原点外 $\Delta(E)$ 没有其他有理点,因而它不含有对称的开区间.由命题 2 可知,若 E 可测,则必有 $mE=0$.

其次,设 a_1 ,a_2 是 $\mathbf{Q}$ 中任意两个不同的点,则点集 $E_i=\{x\mid x=e_i+a_i,e_i\in E\}(i=1,2)$ 互不相交,如若不然,设有 $e_1,e_2\in E$,使 $e_1+a_1=e_2+a_2$,则有 $e_1-e_2=a_2-a_1\in\mathbf{Q}$,从而 $e_1-e_2=0$,$e_1=e_2$,由此推出 $a_1=a_2$,矛盾.

另一方面,$\mathbf{R}$ 中任一点 x 必属于这些等价类中之一,设 x 属于 e 所代表的等价类,因而可以写成 $x=e+a$,$e\in E$,$a\in\mathbf{Q}$. 因此,若将 $\mathbf{Q}$ 写成 $\{a_n\}$,$E_n=\{x\mid x=e+a_n,e\in E\}$,$n\in\mathbf{N}^+$,则由 Lebesgue 测度的平移不变性,有 $mE_n=mE=0$. 而 $\mathbf{R}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{E}_n$,则 $m\mathbf{R}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{mE}_n=0$,这是不可能的,因而 E 是不可测集.

习　　题

1. 若 $m^*A=0$,则 $m^*(A\cup B)=m^*B$.

2. 试求 $[0,1]$ 中无理数集的外测度.

3. 若 B 为有界集,证明:$m^*A-m^*B\leqslant m^*(A\cup B)-m^*B\leqslant m^*(A-B)$.

4. 设有界集 $E\subset\mathbf{R}$,$m^*E>0$,又 $0<c<m^*E$,试证存在 E 的子集 E_1 ,使 $m^*E_1=c$.

5. 若 $E_1\subset E$,$mE=0$,则 E_1 为可测集.

6. 若 A,B 可测,证明:$mA+mB=m(A\cup B)+m(A\cap B)$.

7. 设 A 为可测集，B 为任意一个集，证明：$m^*(A\cup B)+m^*(A\cap B)=mA+m^*B$.

8. 设 E_1,E_2 是 $[0,1]$ 中的两个可测集，满足 $mE_1+mE_2>1$，试证：$m(E_1\cap E_2)>0$

9. 设 $\{A_n\}$ 是可测集列，且 $A_n\subset[0,1]\,(n=1,2,\cdots)$，且 1 是 $\{mA_n\,|\,n=1,2,\cdots\}$ 的聚点，证明：存在子集列 $\{A_{n_k}\}$，使得

(1) $\sum_{k=1}^{\infty}(1-mA_{n_k})<1$；

(2) $m(\bigcap_{k=1}^{\infty}A_{n_k})>0$.

10. 若 E_1,E_2 均可测，且 $m[(E_1-E_2)\cup(E_2-E_1)]=0$，试证：$mE_1=mE_2=m(E_1\cap E_2)$.

11. 设 $E_i(i=1,2\cdots,k)$ 为 $[0,1]$ 内 k 个可测子集，且 $\sum_{i=1}^{k}mE_i>k-1$，则 $m(\bigcap_{i=1}^{k}E_i)>0$.

12. 设 $E\subset\mathbf{R}$，试证 E 为可测集的充要条件是：对任意的 $\varepsilon>0$，存在开集 G 与闭集 F，满足 $F\subset E\subset G$，且 $m(G-F)<\varepsilon$.

第 4 章　可测函数

为了建立新的积分，我们已经对 $\mathbf{R}^n$ 中的一般集合定义了测度概念. 在本章中我们将定义可测函数的概念，讨论可测函数的性质. 我们会看到，可测函数类是包含连续函数类的一种范围相当广泛的函数类. 这个函数类对于四则运算是封闭的，而且对于极限运算也是封闭的. 我们还要讨论可测函数与连续函数的关系，从而进一步研究可测函数的结构. 最后研究可测函数的几种不同类型的收敛概念及其相互关系，使我们对可测函数有较深刻的理解.

4.1　可测函数的定义及其性质

在本书引言中指出，定义新的积分需要研究什么样的函数 $f(x)$，使得对任何实数 a,b，点集 $\{x \mid a < f(x) \leqslant b\}$ 都有"长度"，即都是可测集.

可测函数的概念就是由此产生的. 因为本章讨论的函数可以取值 $\pm\infty$，所以在给出可测函数概念之前，我们要介绍有限函数的概念和包含 $\pm\infty$ 在内的实数运算的规定.

设 $E \subset \mathbf{R}^n$，称 $f(x)$ 是 E 上的**有限函数**，是指对任意的 $x \in E$，函数值 $f(x)$ 都是有限实数.

包含 $\pm\infty$ 在内的实数运算作如下规定：

(1) $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$，$(-\infty)+(-\infty)=-\infty$；

(2) 对任意的有限实数 a，$a+(+\infty)=+\infty$，$a+(-\infty)=-\infty$；

(3) 对任意的 $b>0$，$c<0$，$b\cdot+\infty=+\infty$，$b\cdot(-\infty)=-\infty$，$c\cdot(+\infty)=-\infty$，$c\cdot(-\infty)=+\infty$；

(4) $(+\infty)\cdot(+\infty)=(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$，$(+\infty)\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$. 而 $(+\infty)-(+\infty)$，$(+\infty)+(-\infty)$，$(-\infty)-(-\infty)$，$(-\infty)+(+\infty)$，$\frac{+\infty}{+\infty}$，$\frac{+\infty}{-\infty}$，$\frac{-\infty}{+\infty}$，$\frac{-\infty}{-\infty}$ 被认为是没有意义的. $0\cdot(\pm\infty)$ 在一般情况下也是不允许的.

定义 4.1.1 设 $f(x)$ 是定义在可测集 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的函数,如果对任何有限实数 a，$E[f>a]=\{x\mid x\in E,f(x)>a\}$ 都是可测集,则称 $f(x)$ 为定义在 E 上的可测函数,或者说，$f(x)$ 在 E 上可测.

例 4.1.1 区间 $[a,b]$ 上的连续函数及单调函数都是可测函数.

证明 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数,对任意的实数 c，往证 $\{x\mid f(x)>c\}$ 是开集,任取 $x_0\in\{x\mid f(x)>c\}$，则 $f(x_0)>c$，由连续函数的保号性知,存在 $\delta>0$，使得当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时,有 $f(x)>c$，所以 $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset\{x\mid f(x)>c\}$. 所以 x_0 是 $\{x\mid f(x)>c\}$ 的内点. 因此 $\{x\mid f(x)>c\}$ 是开集. 从而 $\{x\mid f(x)>c\}$ 是可测集,于是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可测.

若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调函数,不妨设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调增加函数,对任意的实数 c：

(1) 当 $f(b)\leqslant c$ 时，$\{x\mid f(x)>c\}$ 是空集 $\varnothing$，因而是可测集.

(2) 当 $c<f(a)$ 时，$\{x\mid f(x)>c\}=[a,b]$，也是可测集.

(3) 当 $f(a)\leqslant c<f(b)$ 时,令 $x_0=\inf\{x\mid f(x)>c\}$，则：

① 若 $f(x_0)>c$，则 $\{x\mid f(x)>c\}=[x_0,b]$；

② 若 $f(x_0)\leqslant c$，则 $\{x\mid f(x)>c\}=(x_0,b]$.

因此,当 $f(a)\leqslant c<f(b)$ 时，$\{x\mid f(x)>c\}$ 也是可测集.

综上，$f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数.

例 4.1.2 设 $E\subset\mathbf{R}^n$ 是可测集,则 E 的特征函数

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1, & x\in E;\\ 0, & x\bar{\in} E.\end{cases}$$

是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的可测函数.

证明 对任意的实数 a，有

$$\{x \mid \chi_E(x) > a\} = \begin{cases} \mathbf{R}^n, & a < 0; \\ E, & 0 \leqslant a < 1; \\ \varnothing, & a \geqslant 1. \end{cases}$$

而 $\mathbf{R}^n$,E 和 $\varnothing$ 都是可测集,所以对任意的实数 a ,$\{x \mid \chi_E(x) > a\}$ 是可测集. 因而 $\chi_E(x)$ 是可测函数.

例 4.1.3 设 B 是不可测集,则 B 的特征函数 $\chi_B(x)$ 不是可测函数.

证明 取 $a = \dfrac{1}{2}$,$\{x \mid \chi_B(x) > a\} = B$ 是不可测集,因此 $\chi_B(x)$ 不是可测函数.

例 4.1.2 和例 4.1.3 说明,点集 E 是可测集的充要条件是 E 的特征函数 $\chi_E(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的可测函数.

例 4.1.4 若 $E \subset \mathbf{R}^n$ 是零测集,$f(x)$ 是 E 上的函数,则 $f(x)$ 在 E 上可测.

证明 因为对任意的实数 a ,$E[f > a] \subset E$,由于 E 是零测集,所以 $E[f > a]$ 也是零测集,因而可测. 所以 $f(x)$ 在 E 上可测.

定理 4.1.1 设 $f(x)$ 是可测集 $E \subset \mathbf{R}^n$ 上的函数,则下述(1),(2),(3),(4)是等价的:

(1) f 是 E 上的可测函数;

(2) 对任何实数 a ,$E[f \geqslant a]$ 是可测集;

(3) 对任何实数 a ,$E[f < a]$ 是可测集;

(4) 对任何实数 a ,$E[f \leqslant a]$ 是可测集.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2),因为对任意的实数 a ,$E[f \geqslant a] = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E[f > a - \frac{1}{n}]$. 所以 $f(x)$ 若在 E 上可测,则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E[f > a - \frac{1}{n}]$ 是可测集,因而 $E[f \geqslant a]$ 是可测集.

(2) $\Rightarrow$ (3),因为对任意的实数 a ,$E[f < a] = E - E[f \geqslant a]$. 所以,若 $E[f \geqslant a]$ 是可测集,则 $E[f < a] = E - E[f \geqslant a]$ 是可测集.

(3) $\Rightarrow$ (4),因为对任意的实数 a ,$E[f \leqslant a] = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E[f < a + \frac{1}{n}]$,所以若对任意的实数 a ,$E[f < a]$ 是可测集,则 $E[f \leqslant a] = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E[f < a + \frac{1}{n}]$ 是可测集.

(4) ⇒ (1),若对任意的实数 a ,$E[f \leqslant a]$ 是可测集,则 $E[f > a] = E - E[f \leqslant a]$ 是可测集,所以由可测函数定义可知 f 是 E 上的可测函数.

在本节开头,我们曾提出什么样的函数 $f(x)$ 使得对任意的实数 a 和 b ,点集 $\{x \mid a < f(x) \leqslant b\}$ 都是可测集.

有了可测函数的定义,我们有下面的结果:

若 f 是 E 上的可测函数,则对任何实数 $a,b(a < b)$,点集 $E[a < f \leqslant b]$ 是可测集. 反之,如果 f 是可测集 E 上的有限函数,若对任何实数 $a,b(a < b)$,点集 $E[a<f\leqslant b]$是可测集,则 f 是 E 上的可测函数.

证明 因为 $E[a < f \leqslant b] = E[f > a] - E[f > b]$,所以若 f 是 E 上的可测函数,则 $E[f > a]$ 和 $E[f > b]$ 都是可测集,因而 $E[a < f \leqslant b]$ 是可测集.

反之,如果 f 是可测集 E 上的有限函数,若对任何实数 $a,b(a < b)$, $E[a < f \leqslant b]$ 是可测集,则因为

$$E[f \leqslant b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E[-n + b < f \leqslant b],$$

所以,$E[f \leqslant b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E[-n + b < f \leqslant b]$ 是可测集.

由定理 4.1.1 可知 f 是 E 上的可测函数.

例 4.1.5 设 $f(x)$ 在 $E \subset \mathbf{R}^n$ 上可测,则对任何实数 a ,$E[f = a]$ 是可测集,$E[f = +\infty]$ 及 $E[f = -\infty]$ 也是可测集.

证明 因为 $E[f = a] = E[f \geqslant a] - E[f > a]$,由于 f 在 E 上可测,由定理 4.1.1 可知 $E[f = a]$ 是可测集. 而

$$E[f = +\infty] = \bigcap_{n=1}^{\infty} E[f > n];$$

$$E[f = -\infty] = \bigcap_{n=1}^{\infty} E[f < -n],$$

所以由定理 4.1.1 可知 $E[f = +\infty]$ 和 $E[f = -\infty]$ 是可测集.

定理 4.1.2 (1) 设 $f(x)$ 是 $E \subset \mathbf{R}^n$ 上的可测函数,则 $f(x)$ 在 E 的任一可测子集 E_1 上也可测;

(2) 设 $E \subset \mathbf{R}^n$ 是至多可数个可测集 $\{E_i\}$ 的并集,$f(x)$ 是 E 上的函数,则 $f(x)$ 在 E 上可测的充分必要条件是 $f(x)$ 在每个 E_i 上可测.

证明 (1) 设 $E_1 \subset E$ 是可测集,因为对任意的实数 a ,$E_1[f > a] = E_1 \cap$

$E[f>a]$，所以 $E_1[f>a]$ 是可测集，因而 $f(x)$ 是 E_1 上的可测函数.

(2) 必要性. 若 $f(x)$ 在 E 上可测，由(1)可知 $f(x)$ 在每个 $E_i \subset E$ 上可测.

充分性. 设 $f(x)$ 在每个 E_i 上可测，因为对任意的实数 a，$E[f>a]=\bigcup_i E_i[f>a]$，所以 $E[f>a]$ 是可测集，因而 $f(x)$ 在 E 上可测.

为了讨论 $\mathbf{R}^n$ 中一般可测集 E 上连续函数的可测性，我们给出 $\mathbf{R}^n$ 中一般点集 E 上连续函数的定义.

定义 4.1.2　称定义在 $E \subset \mathbf{R}^n$ 上的实函数 $f(x)$ 在 $x_0 \in E$ 处连续，即如果 $y_0=f(x_0)$有限，而且对于 y_0 的任一邻域 V，总存在 x_0 的某邻域 U，使 $f(U \cap E) \subset V$. 即只要 $x \in E$ 且 $x \in U$ 时，就有 $f(x) \in V$.

如果 $f(x)$ 在 E 中每一点都连续，则称 $f(x)$ 在 E 上连续.

定理 4.1.3　可测集 $E \subset \mathbf{R}^n$ 上的连续函数是可测函数.

证明　对任意的实数 a，往证 $E[f>a]$ 是可测集.

设 $x \in E[f>a]$，由连续函数局部保号性可知，存在 x 的某邻域 $U(x)$，使 $U(x) \cap E \subset E[f>a]$.

令 $G=\bigcup_{x\in E[f>a]} U(x)$，则

$$\begin{aligned} G \cap E &= \Big(\bigcup_{x\in E[f>a]} U(x)\Big) \cap E \\ &= \bigcup_{x\in E[f>a]} (U(x) \cap E) \subset E[f>a]. \end{aligned}$$

另一方面，显然有 $E[f>a] \subset G$，因此 $E[f>a] \subset G \cap E$，所以 $E[f>a]=G \cap E$.

因此 $E[f>a]$ 是可测集，因而 $f(x)$ 是可测函数.

下面的定理说明可测函数类对四则运算是封闭的.

引理 1　设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为 E 上的可测函数，则 $E[f>g]$ 与 $E[f\geqslant g]$ 都是可测集.

证明　因为 $E[f\geqslant g]=E-E[f<g]$，所以只须证明 $E[f>g]$ 是可测集.

设 $x_0 \in E[f>g]$，则 $f(x_0)>g(x_0)$，存在有理数 r，使 $f(x_0)>r>g(x_0)$，即 $x_0 \in E[f>r] \cap E[g<r]$.

反之，若存在有理数 r，使 $x_0 \in E[f>r] \cap E[g<r]$，则 $x_0 \in E[f>g]$.

设有理数全体为 $\{r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots\}$，则

$$E[f>g]=\bigcup_{n=1}^{\infty}(E[f>r_n]\cap E[g<r_n]).$$

由 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是可测函数可知,等式右端是可测集,所以 $E[f>g]$ 是可测集.

定理 4.1.4　设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是 E 上的可测函数,则下列函数都是 E 上的可测函数.

(1) $af(x)$,a 为任意实数;

(2) $f(x)+g(x)$;

(3) $f(x)g(x)$;

(4) $\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x)\neq 0)$;

(5) $|f(x)|$.

证明　(1) 当 $a=0$ 时,$af(x)$ 是常数函数,因而是连续函数,所以是可测函数. 当 $a\neq 0$ 时,对任何实数 c ,

$$E[af>c]=\begin{cases}E[f>\dfrac{c}{a}], & a>0;\\[2ex] E[f<\dfrac{c}{a}], & a<0.\end{cases}$$

是可测集,所以 af 是 E 上的可测函数.

(2) 对任意的实数 a ,$g(x)+a$ 是可测函数,这是因为对任意的实数 c ,

$$E[g+a>c]=E[g>c-a].$$

由 g 是可测函数,$E[g>c-a]$ 是可测集,因而 $g(x)+a$ 是可测函数.

这样,对任意的实数 a ,$E[f+g>a]=E[f>-g+a]$,g 是可测函数,由(1)有 $-g$ 是可测函数,由上面说明 $-g+a$ 是可测函数,由引理 1 有 $E[f+g>a]$ 是可测集,因此 $f(x)+g(x)$ 是 E 上的可测函数.

(3) 先证 $f^2(x)$ 是 E 上的可测函数,对任意的实数 a ,有

$$E[f^2>a]=\begin{cases}E[f>\sqrt{a}]\cup E[f<-\sqrt{a}], & a\geqslant 0;\\ E, & a<0.\end{cases}$$

因而 $E[f^2>a]$ 是可测集,所以 $f^2(x)$ 在 E 上可测. 而

$$f(x)g(x)=\frac{1}{2}[(f+g)^2-f^2-g^2],$$

所以由(1),(2)及 f^2 可测知 $f(x)g(x)$ 是 E 上的可测函数.

(4) 先证 $\frac{1}{g}$ 可测.对任意的实数 a,

$$E\left[\frac{1}{g}>a\right]=\begin{cases}E\left[g<\frac{1}{a}\right]\cap[g>0],a>0;\\E[g>0]\cup E\left[g<\frac{1}{a}\right],a<0;\\E[g>0]-E[g=+\infty],a=0.\end{cases}$$

是可测集,所以 $\frac{1}{g}$ 是可测函数,而 $\frac{f}{g}=f\cdot\frac{1}{g}$,由(3)可知 $\frac{f}{g}$ 是 E 上的可测函数.

(5) 对任意的实数 a,

$$E[|f|>a]=\begin{cases}E[f>a]\cup[f<-a],\ a\geqslant 0;\\E,\qquad\qquad a<0.\end{cases}$$

是可测集,所以 $|f(x)|$ 是 E 上的可测函数.

定义 4.1.3　设 $E\subset\mathbf{R}^n$ 是可测集, $E_1,E_2,\cdots,E_m$ 是 E 的互不相交的可测子集,且 $\bigcup_{i=1}^{m}E_i=E$, $C_1,C_2,\cdots,C_m$ 是常数,则称 E 上的函数 $\psi(x)=C_i$ ($x\in E_i$, $i=1,2,\cdots,m$)是 E 上的**简单函数**.

显然有 $\psi(x)=\sum_{i=1}^{m}C_i\chi_{E_i}(x)$.其中 $\chi_{E_i}(x)$ 是 E_i 的特征函数.

例 4.1.6　可测集 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的简单函数 $\psi(x)$ 是可测函数.

证明　设 $\psi(x)$ 是 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的简单函数, $\psi(x)=C_i$ ($x\in E_i$, $i=1,2,\cdots,m$). 对每一个 $1\leqslant i\leqslant m$, $\psi(x)$ 在 E_i 上是常数函数,因而连续,所以可测.即 $\psi(x)$ 在每一个 $E_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 上都可测,由定理 4.1.2 的(2), $\psi(x)$ 在 $E=\bigcup_{i=1}^{m}E_i$ 上可测.

下面讨论可测函数列的极限运算.

定义 4.1.4　设 $\{f_n(x)\}$ 是 E 上的可测函数列.任取 $x_0\in E$,令

$$M(x_0)=\sup\{f_1(x_0),f_2(x_0),\cdots,f_n(x_0),\cdots\};$$

$$m(x_0)=\inf\{f_1(x_0),f_2(x_0),\cdots,f_n(x_0),\cdots\}.$$

称 E 上的函数 $M(x)$ 和 $m(x)$ 分别为 $\{f_n(x)\}$ 的上确界函数和下确界函数,记为

$$M(x)=\sup_n f_n(x)\ ,\ x\in E\ ,$$

$$m(x)=\inf_n f_n(x)\ ,\ x\in E\ .$$

定理 4.1.5　E 上可测函数列 $\{f_n(x)\}$ 的上确界函数 $M(x)$ 和下确界函数 $m(x)$ 都是可测函数.

证明　对任意的实数 a，由于

$$E[M>a]=\bigcup_{n=1}^{\infty}E[f_n>a]\ ,$$

$$E[m<a]=\bigcup_{n=1}^{\infty}E[f_n<a]\ .$$

所以 $E[M>a]$ 和 $E[m<a]$ 都是可测集，因而 $M(x)$ 和 $m(x)$ 都是 E 上的可测函数.

定理 4.1.6　设 $\{f_n(x)\}$ 是 E 上可测函数列，则 $F(x)=\underline{\lim}_{n\to\infty}f_n(x)$ 和 $G(x)=\overline{\lim}_{n\to\infty}f_n(x)$ 也是 E 上的可测函数.

如果 $\underline{\lim}_{n\to\infty}f_n(x)=\overline{\lim}_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$，则极限函数 $f(x)$ 是 E 上的可测函数.

证明　由于 $\underline{\lim}_{n\to\infty}f_n(x)=\sup_n(\inf_{m\geqslant n}f_m(x))$，$\overline{\lim}_{n\to\infty}f_n(x)=\inf_n(\sup_{m\geqslant n}f_m(x))$.

由定理 4.1.5 可知 $\{m_n(x)\}=\{\inf_{m\geqslant n}f_m(x)\}$ 是可测函数列，因此可知 $F(x)=\underline{\lim}_{n\to\infty}f_n(x)=\sup_n\{m_n(x)\}$ 是 E 上的可测函数.

同理可证 $G(x)=\overline{\lim}f_n(x)$ 是 E 上的可测函数.

设 $f(x)$ 是 E 上的实函数，令

$$f^+(x)=\max\{f(x),0\}=\begin{cases}f(x),x\in E[f\geqslant 0];\\0,\quad x\in E[f<0].\end{cases}$$

$$f^-(x)=\max\{-f(x),0\}=\begin{cases}0,\quad x\in E[f\geqslant 0];\\-f(x),x\in E[f<0].\end{cases}$$

则 $f^+(x)$ 和 $f^-(x)$ 都是 E 上的非负函数，分别称为 $f(x)$ 的正部和负部.

显然

$$f(x)=f^+(x)-f^-(x)\ ,$$

$$|f(x)|=f^+(x)+f^-(x)\ .$$

当 $f(x)$ 在 E 上可测时，$f^+(x)$ 和 $f^-(x)$ 也在 E 上可测.

在实变函数中，经常遇到"几乎处处"的概念.

定义 4.1.5　设 E 是可测集，$P(x)$ 是一个和 E 中的点 x 有关的命题.

如果除了 E 的一个零测度集外 $P(x)$ 处处成立，则称 $P(x)$ 在 E 上几乎处处成立. 记为 $P(x)$ $a.e.$ 于 E.

这里的 $a.e.$ 是英文 almost everywhere 的缩写.

例 4.1.7　$|\tan x|<+\infty$ $a.e.$ 于 $\mathbf{R}$；$[0,1]$ 上的 Dirichlet 函数 $D(x)=0$ $a.e.$ 于 $[0,1]$.

例 4.1.8　若函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上满足 $mE[f_n \not\to f]=0$，则称 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ $a.e.$ 于 E.

定理 4.1.7　设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是定义在可测集 E 上的函数. 若 $f(x)$ 在 E 上可测，且 $f=g$ $a.e.$ 于 E，则 $g(x)$ 也在 E 上可测.

证明　设 $A=E[f\neq g]$，则 $mA=0$. 由定理 4.1.2 的(1)可知 $f(x)$ 在 $E-A$ 上可测. 而在 $E-A$ 上 $g(x)=f(x)$，所以 $g(x)$ 在 $E-A$ 上可测. 因为 $mA=0$，由例 4.1.4 可知 $g(x)$ 在 A 上可测. 又由定理 4.1.2 的(2)可知 $g(x)$ 在 $E=(E-A)\cup A$ 上可测.

4.2　叶果洛夫[①]定理

在数学分析中，我们知道如果一个函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f，那么 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上每一点都收敛于 f，反之不然；现在我们也能知道如果一个函数列 $\{f_n\}$ 在 E 上每一点都收敛于函数 f，则我们可以说 $\{f_n\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 f，但反之不然. 从定义我们已经知道 $\{f_n\}$ 在 E 上每一点都收敛于 f 和 $\{f_n\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 f 的关系，然而，到现在我们还不清楚 $\{f_n\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$ 或者 $\{f_n\}$ 在 E 上每一点都收敛于 f 与 $\{f_n\}$ 在 E 上一致收敛于 f 的关系.

---

① ЕГОРОВ，英文 Egoroff，1869—1931，俄国数学家.

在数学分析中，我们也经常遇到这样的问题：一个函数列尽管在给定的区间上不一致收敛，但只要在区间的某端去掉一个长度大于零但可以任意小的区间后，该函数列就能在剩下的区间上一致收敛了. 比如，$f_n(x)=x^n$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛. 但是只要从 $[0,1]$ 的右端点去掉任意小的一段成为 $[0,1-\delta](0<\delta<1)$，则 $\{f_n\}$ 在其上就一致收敛了. 这一现象具有普遍的意义，叶果洛夫定理就揭示了这个规律.

定理 4.2.1（叶果洛夫定理） 设 E 是可测集，$mE<\infty$，$f_n(x)(n\in\mathbf{N}^+)$ 与 $f(x)$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数，且 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$. 那么，对任意的 $\delta>0$，存在子集 $E_\delta\subset E$，使函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 E_δ 上一致收敛于 $f(x)$，且 $m(E-E_\delta)<\delta$.

证明 令 $E^*=E[|f|=\infty]\cup\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E[|f_n|=\infty]$，则 E^* 是零测度集. 当有必要时可用 $E-E^*$ 代替 E，所以在证明中不妨假定每个 $f_n(x)(n\in\mathbf{N}^+)$ 与 $f(x)$ 都在 E 上处处有限.

对任意的 $\delta>0$，我们先构造 E 的子集 E_δ，使 $m(E-E_\delta)<\delta$，然后证明 $\{f_n(x)\}$ 在 E_δ 上一致收敛于 $f(x)$.

设 $\varepsilon>0$，令 $E_n=E_n(\varepsilon)=E[|f_n-f|\geqslant\varepsilon]$，则当 $x_0\in\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n$ 时，$f_n(x_0)\not\to f(x_0)(n\to\infty)$.

事实上，由 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n$ 的定义，若 $x_0\in\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n$，则有无穷多个 E_n 包含 x_0，即有正整数子列 $\{n_k\}$，使 $x_0\in E_{n_k}(k=1,2,\cdots)$. 因此

$$|f_{n_k}(x_0)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon,$$

所以

$$f_n(x_0)\not\to f(x_0)(n\to\infty).$$

由假设 $f_n(x)\to f(x)a.e.$ 于 E，所以 $m(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n)=0$. 记 $F_k(\varepsilon)=\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}E_n(\varepsilon)$ $(k=1,2,\cdots)$，则 $\{F_k\}$ 是单调减少集列，且 $mF_1=m(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n)\leqslant mE<\infty$，由定理3.2.9，有

$$\lim_{k\to\infty}mF_k=m(\lim_{k\to\infty}F_k)=m(\bigcap_{k=1}^{\infty}F_k)=m(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}E_n)=m(\overline{\lim_{k\to\infty}}E_k)=0,$$

所以对任意的 $\eta>0$，有 $k\in\mathbf{N}^+$，使 $mF_k(\varepsilon)<\eta$.

特别的，对任意的 $\delta > 0$ 以及正整数 r，取 $\varepsilon = \frac{1}{2^r}$，$\eta = \frac{\delta}{2^r}$，那么，必有 k_r 使 $mF_{k_r}(\frac{1}{2^r}) < \frac{\delta}{2^r}$，从而

$$m\left(\bigcup_{r=1}^{\infty} F_{k_r}(\frac{1}{2^r})\right) \leqslant \sum_{r=1}^{\infty} mF_{k_r}(\frac{1}{2^r}) < \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^r} = \delta .$$

设 $S = \bigcup_{r=1}^{\infty} F_{k_r}(\frac{1}{2^r})$，$E_\delta = E - S$，则 $m(E - E_\delta) = mS < \delta$. 往证 $\{f_n(x)\}$ 在 E_δ 上一致收敛于 $f(x)$. 事实上，当 $x \in E_\delta$ 时，$x \bar{\in} S$，即对任意的 $r \in \mathbf{N}^+$，$x \bar{\in} F_{k_r}(\frac{1}{2^r})$，即当 $n \geqslant k_r$ 时，$x \bar{\in} E_n = E\left[\,|f_n - f| \geqslant \frac{1}{2^r}\right]$，此即当 $n \geqslant k_r$，$x \in E_\delta$ 时，有

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2^r} \to 0 (r \to \infty),$$

并且 k_r 只与 r，δ 有关，与 $x \in E_\delta$ 无关，因而 $\{f_n(x)\}$ 在 E_δ 上一致收敛于 $f(x)$. 定理得证.

注 1：定理中条件 $mE < \infty$ 是不能去掉的.

例如，设 $E = (0,\infty)$，在 E 上构造函数列

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,n); \\ 0, & x \in [n,\infty). \end{cases} \quad n = 1,2,\cdots .$$

那么，对任意的 $x \in E = (0,\infty)$，有充分大的 $N_x \in \mathbf{N}^+$，使得 $x \in (0,N_x)$，于是当 $n \geqslant N_x$ 时，$f_n(x) = 1$，因此

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \equiv 1 (0 < x < \infty).$$

取 $\delta = 1$，则对任何可测集 $E_\delta \subset E$，若 $m(E - E_\delta) < \delta$，则在 E_δ 上 $\{f_n(x)\}$ 不可能一致收敛于 $f(x) \equiv 1$. 事实上，由于 $m(E - E_\delta) < \delta = 1$，所以 $mE_\delta = \infty$，于是集 E_δ 无界. 取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$，对任意的正整数 N，存在 $n = N + 1$ 和 $x_0 > N + 1$ 且 $x_0 \in E_\delta$. 则

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| = |0 - 1| = 1 > \varepsilon_0 .$$

所以在 E_δ 上 $\{f_n(x)\}$ 不一致收敛于 $f(x)$.

注 2：定理中的 E_δ 与 δ 有关. 定理结论中的“对任意的 $\delta > 0$”不能改成“对于

$\delta=0$”,即在 $mE<\infty$ 时,从 $f_n\to f$ $a.e.$ 于 E 不一定能推出存在子集 $E_0\subset E$,使得 $\{f_n(x)\}$ 在 E_0 上一致收敛于 $f(x)$,而 $m(E-E_0)=0$.

例如,设 $E=(0,1)$,$f_n(x)=x^n$ ($x\in E,n=1,2,\cdots$),则对任意的 $x\in E$,$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\equiv 0$.对任一满足 $m(E-E_0)=0$ 的 $E_0\subset E$,存在

$$x_n\in(1-\frac{1}{n},1)\cap E_0(n=1,2,\cdots),$$

于是 $x_n\in E_0$ 且 $1-\frac{1}{n}<x_n<1$,所以

$$f_n(x_n)=x_n^n>(1-\frac{1}{n})^n\to\frac{1}{e}(n\to\infty),$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_n)\neq 0$,这说明在 E_0 上 $\{f_n(x)\}$ 不一致收敛于 $f(x)\equiv 0$.

由叶果洛夫定理的结果,我们引进如下概念:

定义 4.2.1 设 f,$f_n(n\in\mathbf{N}^+)$ 是可测集 E 上几乎处处有限的可测函数.如果对任意的 $\delta>0$,恒存在 E 的可测子集 E_δ,使得 $m(E-E_\delta)<\delta$,而在 E_δ 上 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$,则称函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上**近一致收敛**于 $f(x)$.

叶果洛夫定理的逆定理也是成立的.

定理 4.2.2 设可测集 E 上可测函数列 $\{f_n(x)\}$ 近一致收敛于 $f(x)$,则 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$.

证明 因为 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上近一致收敛于 $f(x)$,所以对任意的正整数 n,存在可测集 $E_n\subset E$,使 $m(E-E_n)<\frac{1}{n}$,而在 E_n 上 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$.令 $E_0=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(E-E_n)$,则

$$E_0\subset E-E_n,n=1,2,\cdots,$$

$$mE_0\leqslant m(E-E_n)<\frac{1}{n},n=1,2,\cdots,$$

所以 $mE_0=0$.

对任意的 $x\in E-E_0=E-\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(E-E_n)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$,存在某 $k\in\mathbf{N}^+$,使 $x\in E_k$,而在 E_k 上 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$,所以对每一个 $x\in E-E_0$,极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ 存在,而 $m[E-(E-E_0)]=mE_0=0$.

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ $a.e.$ 于 E. 定理得证.

4.3　可测函数的结构

在本节,我们讨论可测函数与简单函数的关系、可测函数与连续函数的关系,得到用简单函数列逼近可测函数的定理和用连续函数刻画可测函数的鲁金[①](ЛУЗИН)定理.

1. 可测函数与简单函数

我们知道简单函数是可测函数,由定理 4.1.6 可知简单函数列 $\{\varphi_n(x)\}$ 的极限函数 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)$ 是可测函数. 我们要问,一个可测函数能否表示成一个简单函数列的极限函数呢? 回答是肯定的.

定理 4.3.1(可测函数与简单函数的关系)　设 $f(x)$ 是 E 上的可测函数,则 $f(x)$ 可以表示成一列简单函数 $\{\varphi_n(x)\}$ 的极限函数,即 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)$. 而且还可以做到

$$|\varphi_1(x)| \leqslant |\varphi_2(x)| \leqslant \cdots \leqslant |\varphi_n(x)| \leqslant \cdots.$$

证明　(1) $f(x) \geqslant 0$ 情形.

设 $[t]$ 表示不大于 t 的最大整数,则当 $t \geqslant 0$ 时,有某个 $k \in \mathbf{N}$,使 $0 \leqslant k \leqslant t < k+1$,这样 $2[t] = 2k \leqslant [2t]$.

当 $t \geqslant 0$ 时,令 $\psi_n(t) = \begin{cases} \dfrac{[2^n t]}{2^n}, & 0 \leqslant t < n; \\ n, & n \leqslant t \leqslant \infty. \end{cases}$　$n = 1,2,\cdots$.

往证 $\psi_n(t)$ 具有如下性质:

(i) $\psi_n(t) \leqslant \psi_{n+1}(t)(n = 1,2,\cdots)$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(t) = t$.

事实上,若 $t < n$,则

---

① ЛУЗИН,英文 Lusin,1883—1950,俄国数学家.

$$\psi_n(t)=\frac{[2^n t]}{2^n}=\frac{2[2^n t]}{2^{n+1}}\leqslant\frac{[2^{n+1}t]}{2^{n+1}}=\psi_{n+1}(t)\ ;$$

若 $n\leqslant t<n+1$，则

$$\psi_n(t)=n=\frac{2^{n+1}[t]}{2^{n+1}}\leqslant\frac{[2^{n+1}t]}{2^{n+1}}=\psi_{n+1}(t);$$

若 $t\geqslant n+1$，则

$$\psi_n(t)=n<n+1=\psi_{n+1}(t).$$

(i)得证.

如果 $t=+\infty$，则 $\psi_n(t)=n\to\infty(n\to\infty)$；

如果 $0\leqslant t<+\infty$，那么存在正整数 N，使得 $N>t$，从而当 $n\geqslant N$ 时，

$$\begin{aligned}|\psi_n(t)-t|&=\left|\frac{[2^n t]}{2^n}-t\right|\\&=\left|\frac{[2^n t]-2^n t}{2^n}\right|<\frac{1}{2^n}\to 0(n\to\infty),\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(t)=t$. (ii)得证.

令

$$\begin{aligned}\varphi_n(x)&=\psi_n(f(x))\\&=\begin{cases}\dfrac{k}{2^n}, & \text{当 } x\in E\left[\dfrac{k}{2^n}\leqslant f(x)<\dfrac{k+1}{2^n}\right],k=0,1,\cdots,n\cdot 2^{n-1};\\ n, & \text{当 } x\in E[f\geqslant n].\end{cases}\end{aligned}$$

由于 $f(x)\geqslant 0$，由 ψ_n 的定义可知 $\varphi_n(x)$ 为 E 上的简单函数，且由 ψ_n 的性质(i)与(ii)有 $\varphi_n(x)\leqslant\varphi_{n+1}(x)(n=1,2,\cdots)$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(f(x))=f(x)$.

(2) 一般情形.

对于一般的可测函数 $f(x)$，$f(x)=f^+(x)-f^-(x)$.

因为 $f^+(x)$ 和 $f^-(x)$ 是 E 上的非负可测函数，由(1)可知存在非负递增简单函数列 $\{\varphi_n^+(x)\}$ 和 $\{\varphi_n^-(x)\}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n^+(x)=f^+(x)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n^-(x)=f^-(x)$. 显然有 $E[\varphi_n^+>0]\subset E[f^+>0]$，$E[\varphi_n^->0]\subset E[f^->0]$.

因为 $E[f^+>0]\cap E[f^->0]=\varnothing$，所以 $E[\varphi_n^+>0]\cap E[\varphi_n^->0]=\varnothing$. 因此 $\varphi_n^+(x)$ 和 $\varphi_n^-(x)$ 可以作为某个函数的正部和负部. 设 $\varphi_n(x)=\varphi_n^+(x)-\varphi_n^-(x)$，则 $\varphi_n(x)$ 是 E 上的简单函数，且对一切正整数 n，有

$$|\varphi_n(x)| = \varphi_n^+(x) + \varphi_n^-(x) \leqslant \varphi_{n+1}^+(x) + \varphi_{n+1}^-(x) = |\varphi_{n+1}(x)|,$$

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty}\varphi_n^+(x) - \lim_{n\to\infty}\varphi_n^-(x) = f^+(x) - f^-(x) = f(x).$$

定理得证.

2. 可测函数与连续函数

定理 4.3.2 鲁金定理　设 $f(x)$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数，则对任意的 $\delta > 0$，存在闭集 $F_\delta \subset E$，使 $m(E - F_\delta) < \delta$，而 $f(x)$ 在 F_δ 上连续.

证明　(1) $f(x)$ 是简单函数的情形.

设 $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$，各 E_i 是互不相交的可测集，当 $x \in E_i$ 时，$f(x) = C_i (i = 1, 2, \cdots, n)$. 对于 $\delta > 0$，由于 $E_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是可测集，存在闭集 $F_i \subset E_i$，使得

$$m(E_i - F_i) < \frac{\delta}{n}, i = 1, 2, \cdots, n.$$

令 $F_\delta = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$，则 F_δ 是闭集，且

$$\begin{aligned} m(E - F_\delta) &= m\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i - \bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) \\ &\leqslant m\left(\bigcup_{i=1}^{n} (E_i - F_i)\right) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} m(E_i - F_i) \\ &< \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta}{n} \\ &= \delta. \end{aligned}$$

往证 $f(x)$ 在 F_δ 上连续. 事实上，任取 $x_0 \in F_\delta$，存在 $1 \leqslant i_0 \leqslant N$，使 $x_0 \in F_{i_0}$，由各 F_i 互不相交，则 $x_0 \bar{\in} \bigcup_{i \neq i_0} F_i$. 而 $\bigcup_{i \neq i_0} F_i$ 是闭集，所以 $x_0 \in C(\bigcup_{i \neq i_0} F_i)$ 且 $C(\bigcup_{i \neq i_0} F_i)$ 是开集，因此有 x_0 的邻域 $U(x_0)$ 使 $U(x_0) \subset C(\bigcup_{i \neq i_0} F_i)$. 即 $U(x_0) \cap \bigcup_{i \neq i_0} F_i = \varnothing$，从而

$$U(x_0) \cap F_\delta = U(x_0) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) = U(x_0) \cap F_{i_0}.$$

所以，当 $x \in U(x_0) \cap F_\delta$ 时，有

$$|f(x) - f(x_0)| = |C_{i_0} - C_{i_0}| < \varepsilon.$$

因而 $f(x)$ 在 x_0 连续. 由 $x_0 \in F_\delta$ 是任意的, $f(x)$ 在 F_δ 上连续.

(2) $f(x)$ 是一般可测函数的情形.

(i) $mE < \infty$.

设 $f(x)$ 是 E 上的可测函数,则由定理 4. 3. 1 有简单函数列 $\{\varphi_n(x)\}$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x) = f(x)$.

由 Egoroff 定理,对任意的 $\delta > 0$,存在可测子集 $E_0^* \subset E$,使 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 E_0^* 上一致收敛于 $f(x)$,且 $m(E - E_0^*) < \dfrac{\delta}{4}$.

又因为存在闭集 $F_0 \subset E_0^*$,使 $m(E_0^* - F_0) < \dfrac{\delta}{4}$,所以

$$\begin{aligned} m(E - F_0) &= m((E - E_0^*) \cup (E_0^* - F_0)) \\ &\leqslant m(E - E_0^*) + m(E_0^* - F_0) \\ &< \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

由 $F_0 \subset E_0^*$,可知 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 F_0 上也一致收敛于 $f(x)$.

由于每个 $\varphi_i(x)$ 也是 F_0 上的可测函数,由情形(1)可知,存在闭集 $F_i \subset F_0$,使 $\varphi_i(x)$ 在 F_i 上连续,且 $m(F_0 - F_i) < \dfrac{\delta}{2^{i+1}} (i = 1,2,\cdots)$.

令 $F_\delta = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_i$,则 F_δ 是闭集,且 $F_\delta \subset F_0$.

由 $F_0 - F_\delta = F_0 - \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (F_0 - F_i)$,有

$$\begin{aligned} m(F_0 - F_\delta) &\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m(F_0 - F_i) \\ &< \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^{i+1}} \\ &= \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

因为 $\{\varphi_n(x)\}$ 在闭集 F_δ 上一致收敛于 $f(x)$,且每个 $\varphi_n(x)$ 在 F_δ 上连续,则极限函数 $f(x)$ 在 F_δ 上连续,并且

$$\begin{aligned} m(E - F_\delta) &\leqslant m(E - F_0) + m(F_0 - F_\delta) \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

$$=\delta.$$

(ii) $mE=\infty$.

设 S_i 为 $\mathbf{R}^n$ 中开球 $S(0,i)$，当 $i=0$ 时，$S_0=\varnothing$.

令 $E_i=(S_i-S_{i-1})\cap E(i=1,2,\cdots)$，那么 S_i-S_{i-1} $(i=1,2,\cdots)$是 $\mathbf{R}^n$ 中互不相交的左闭右开的区域，且 E_i 是有界集，$mE_i<\infty$ ($i=1,2,\cdots$). $E=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$.

由(i)知存在闭子集 $F_{\delta_i}\subset E_i$，使得 $f(x)$ 在 F_{δ_i} 上连续且

$$m(E_i-F_{\delta_i})<\delta_i=\frac{\delta}{2^i}(i=1,2,\cdots).$$

令 $F_\delta=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}F_{\delta_i}$，则 $F_\delta\subset E$，$f(x)$ 在 F_δ 上连续，且

$$\begin{aligned}m(E-F_\delta)&=m(E-\bigcup_{i=1}^{\infty}F_{\delta_i})\\&=m(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i-\bigcup_{i=1}^{\infty}F_{\delta_i})\\&\leqslant m(\bigcup_{i=1}^{\infty}(E_i-F_{\delta_i}))\\&\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}m(E_i-F_{\delta_i})\\&<\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\delta}{2^i}\\&=\delta\end{aligned}$$

往证 F_δ 是闭集. 任取 $x_0\in F'_\delta$，则 $x_0\in\mathbf{R}^n$，有唯一的 $k\in\mathbf{N}^+$，使 $x_0\in S_k-S_{k-1}(k\geqslant1)$. 因为

$$F_{\delta_k}\subset S_k-S_{k-1};$$

$$F_{\delta_{k-1}}\subset S_{k-1}-S_{k-2}\ (k>1\text{ 时});$$

$$F_{\delta_{k+1}}\subset S_{k+1}-S_k.$$

又由于各个 $(S_k-S_{k-1})(k=1,2,\cdots)$ 互不相交，则 $x_0\bar{\in}F_{\delta_{k+1}}$ 且 $x_0\bar{\in}F_{\delta_{k-1}}$. 因为 $F_{\delta_{k+1}}$ 是闭集，x_0 不是 $F_{\delta_{k+1}}$ 的聚点，所以有 x_0 的某邻域 $U_1(x_0)$，使 $U_1(x_0)\cap F_{\delta_{k+1}}=\varnothing$，同理有 x_0 的某邻域 $U_2(x_0)$，使 $U_2(x_0)\cap F_{\delta_{k-1}}=\varnothing$. 取 $U(x_0)\subset U_1(x_0)\cap U_2(x_0)$ (且使 $U(x_0)$ 的半径小于 1)，则 $U(x_0)\cap F_{\delta_{k+1}}=\varnothing$，$U(x_0)\cap F_{\delta_{k-1}}=\varnothing$，并且当 $i\neq k$ 时，$U(x_0)\cap F_{\delta_i}=\varnothing$.

因为 $x_0 \in F'_\delta$，所以存在点列 $\{x_j\} \subset F_\delta \cap U(x_0)$，使 $x_j \to x_0(j \to \infty)$，而 $F_\delta = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_{\delta_i}$. 由以上分析，当 $i \neq k$ 时，$U(x_0) \cap F_{\delta_i} = \varnothing$，所以 $\{x_j\} \subset F_{\delta_k}$，$x_0$ 是 F_{δ_k} 的聚点. 而 F_{δ_k} 是闭集，所以 $x_0 \in F_{\delta_k} \subset F_\delta$. 这样 $F'_\delta \subset F_\delta$，$F_\delta$ 是闭集. 综上，定理得证.

鲁金定理还有另外一种表达方式，这种形式的鲁金定理会经常用到.

定理 4.3.3 设 $f(x)$ 是 $E \subset \mathbf{R}$ 上的几乎处处有限的可测函数，则对任意的 $\delta>0$，存在闭集 $F \subset E$ 和在 $\mathbf{R}$ 上的连续函数 $g(x)$，使得 $m(E-F) < \delta$，且对任何 $x \in F$，$g(x) = f(x)$，并且有 $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}} g(x) = \sup\limits_{x\in F} f(x)$，$\inf\limits_{x\in\mathbf{R}} g(x) = \inf\limits_{x\in F} f(x)$.

证明 由鲁金定理(定理 4.3.2)，存在闭集 $F \subset E$，使 $f(x)$ 在 F 上连续且 $m(E-F) < \delta$.

以下将闭集 F 上的连续函数 $f(x)$ 延拓成 $\mathbf{R}$ 上的连续函数.

由于 F 是闭集，所以 F 是从直线上挖掉至多可数个互不相交的开区间 (a_i, b_i) 所得到的集. 将 $f(x)$ 在直线上挖掉的各个开区间 (a_i, b_i) 上按如下方式保持线性连续地延拓为 $g(x)$.

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in F; \\ f(a_i) + \dfrac{f(b_i) - f(a_i)}{b_i - a_i}(x - a_i), & x \in (a_i, b_i), a_i, b_i \text{ 是有限的}; \\ f(a_i), & x \in (a_i, b_i), b_i = +\infty; \\ f(b_i), & x \in (a_i, b_i), a_i = -\infty. \end{cases}$$

这样 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数，且满足当 $x \in F$ 时 $g(x) = f(x)$.

在各个 (a_i, b_i) 上，$\sup g(x) = \max\{f(a_i), f(b_i)\}$，$\inf g(x) = \min\{f(a_i), f(b_i)\}$，从而 $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}} g(x) = \sup\limits_{x\in F} f(x)$，$\inf\limits_{x\in\mathbf{R}} g(x) = \inf\limits_{x\in F} f(x)$. 定理得证.

鲁金定理的逆定理是成立的，也就是鲁金定理所述结论还是使函数成为可测的一个充分条件，这个条件可以作为可测函数的定义.

定理 4.3.4① 设 $f(x)$ 是可测集 E 上的几乎处处有限的函数，若对任意的 $\delta>0$，总有闭集 $F_\delta \subset E$，使 $f(x)$ 在 F_δ 上连续，且 $m(E-F_\delta) < \delta$，则 $f(x)$ 是 E 上

① 鲁金定理的逆定理.

的可测函数.

证明　对任意的 $n \in \mathbf{N}^+$，存在闭集 $F_n \subset E$，使 $f(x)$ 在 F_n 上连续，且 $m(E-F_n) < \frac{1}{n}$.

设 $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$，则 F 是可测集，且 $E-F \subset E-F_n (n=1,2,\cdots)$，所以

$$m(E-F) \leqslant m(E-F_n) < \frac{1}{n}, n=1,2,\cdots.$$

因此 $m(E-F)=0$，$E-F$ 是零测度集，则 $f(x)$ 在 $E-F$ 上可测. 由于 $E=(E-F) \cup F$，故只须证明 $f(x)$ 在 F 上可测.

事实上，对任意的实数 a，$F[f>a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n[f>a]$，对于任意的 $n \in \mathbf{N}^+$，由于 $f(x)$ 在 F_n 上连续，所以 $f(x)$ 在 F_n 上可测.

所以 $F_n[f>a](n=1,2,\cdots)$ 是可测集. 因此 $F[f>a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n[f>a]$ 是可测集，这样 $f(x)$ 在 F 上可测. 因而 $f(x)$ 在 E 上可测. 定理得证.

4.4　依测度收敛

定义 4.4.1　设 f 和 $f_n(n \in \mathbf{N}^+)$ 都是可测集 E 上的几乎处处有限的可测函数. 若对任意的 $\sigma > 0$，有

$$\lim_{n \to \infty} mE[|f_n - f| \geqslant \sigma] = 0,$$

则称函数列 $\{f_n\}$ 在 E 上依测度收敛于 f，记为

$$f_n \xrightarrow{m} f.$$

因为点集的测度是一个非负数，所以测度收敛是数列的收敛. 用“$\varepsilon - N$”方式表述，就是：设 f，$f_n(n \in \mathbf{N}^+)$ 都是可测集 E 上的几乎处处有限的可测函数. 若对任意的 $\sigma > 0$ 和 $\varepsilon > 0$，存在正整数 $N(\varepsilon,\sigma)$，使当 $n \geqslant N(\varepsilon,\sigma)$ 时，有

$$mE[|f_n - f| \geqslant \sigma] < \varepsilon,$$

则称函数列 $\{f_n\}$ 在 E 上依测度收敛于 f.

在一般情况下，从函数列 $\{f_n\}$ 测度收敛未必能推出几乎处处收敛，反之亦然.

例 4.4.1　测度收敛而处处不收敛的函数列.

取 $E=(0,1]$，将 E 二等分，定义两个函数：

$$f_1^{(1)}(x)=\begin{cases}1, & x\in\left(0,\frac{1}{2}\right];\\ 0, & x\in\left(\frac{1}{2},1\right].\end{cases}$$

$$f_2^{(1)}(x)=\begin{cases}0, & x\in\left(0,\frac{1}{2}\right];\\ 1, & x\in\left(\frac{1}{2},1\right].\end{cases}$$

然后将 $(0,1]$ 四等分、八等分等等．一般地，对每个 n，将 $(0,1]$ 2^n 等分，作 2^n 个函数：

$$f_j^{(n)}=\begin{cases}1, & x\in\left(\frac{j-1}{2^n},\frac{j}{2^n}\right];\\ 0, & x\bar{\in}\left(\frac{j-1}{2^n},\frac{j}{2^n}\right].\end{cases}\qquad j=1,2,\cdots,2^n.$$

把 $\{f_j^{(n)}\mid n=1,2,\cdots;j=1,2,\cdots,2^n\}$ 先按 n，后按 j 的顺序逐个地排成一列：

$$f_1^{(1)},f_2^{(1)},\cdots,f_1^{(n)},f_2^{(n)},\cdots,f_{2^n}^{(n)},\cdots \tag{4.4.1}$$

$f_j^{(n)}$ 在这个函数列中是第 $N=2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}+j=2^n-2+j$ 个函数．

往证这个函数列是依测度收敛于零的．事实上，对任意的 $\sigma>0$，$E[\,|f_j^{(n)}-0|\geqslant\sigma]$ 或者是空集 $(\sigma>1)$，或者是 $\left(\frac{j-1}{2^n},\frac{j}{2^n}\right](0<\sigma\leqslant 1)$．所以

$$m(E[\,|f_j^{(n)}-0|\geqslant\sigma])\leqslant\frac{1}{2^n}.$$

由于当 $N=2^n-2+j\to\infty$ 时，必有 $n\to\infty$，所以

$$\lim_{N\to}m(E[\,|f_N-0|\geqslant\sigma])=\lim_{n\to\infty}m(E[\,|f_j^{(n)}-0|\geqslant\sigma])=0,$$

即 $f_j^{(n)}\xrightarrow{m}0$．

再证函数列(4.4.1)在 $(0,1]$ 上的任何一点都不收敛．

事实上，对任何点 $x_0\in(0,1]$，不论 n 多么大，总存在 j，使 $x_0\in\left(\frac{j-1}{2^n},\frac{j}{2^n}\right]$，因而 $f_j^{(n)}(x_0)=1$，而 $f_{j+1}^{(n)}(x_0)=0$．就是说，对任何 $x_0\in(0,1]$，在 $\{f_j^{(n)}(x_0)\}$ 中必有两个子列，一个恒为 1，另一个恒为 0，所以序列 $\{f_j^{(n)}(x_0)\}$ 不收敛．由于 $x_0\in$

(0,1] 是任意的，所以序列 4.4.1 在 (0,1] 上任何点都不收敛.

例 4.4.2　几乎处处收敛而不依测度收敛的函数列.

取 $E=(0,+\infty)$，作函数列

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,n);\\ 0, & x\in[n,\infty).\end{cases}\quad n=1,2,\cdots.$$

对任何 $x\in E$，存在 $n\in \mathbf{N}^+$，使 $n>x$，则 $f_n,f_{n+1},\cdots$ 都是 1. 因而 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\equiv 1$，$x\in E$.

然而当取 $0<\sigma<1$ 时，$E[|f_n-1|\geqslant\sigma]=[n,+\infty)$，而 $m[n,+\infty)=\infty$，$n=1,2,\cdots$，所以

$$\lim_{n\to\infty} mE[|f_n-1|\geqslant\sigma]=\infty(0<\sigma<1).$$

因而 $\{f_n\}$ 不依测度收敛于 1.

尽管在一般情况下，对于几乎处处收敛和依测度收敛，其中一种收敛不能蕴涵另一种收敛，但是它们还是有密切联系的，当限制条件时，它们之间的某种联系甚至是很深刻的. 下面的两个定理反映出了它们之间的联系.

定理 4.4.1(Riesz)①定理　设可测函数列 $\{f_n\}$ 在 E 上依测度收敛于函数 f，则存在子列 $\{f_{n_i}\}$ 几乎处处收敛于 f.

证明　对任何正整数 i，取 $\varepsilon_i=\dfrac{1}{2^i}$，$\sigma_i=\dfrac{1}{2^i}$，由 $f_n\xrightarrow{m} f$，存在正整数 n_i，使 $mE\left[|f_{n_i}-f|\geqslant\dfrac{1}{2^i}\right]<\dfrac{1}{2^i}(i=1,2,\cdots)$，而且能做到使 $n_1<n_2<\cdots$.

为叙述方便，记 $E_i=E\left[|f_{n_i}-f|\geqslant\dfrac{1}{2^i}\right]$. 令 $F_k=\bigcap\limits_{i=k}^{\infty}(E-E_i)$，由于

$$E-E_i=E\left[|f_{n_i}-f|<\frac{1}{2^i}\right],$$

所以

$$F_k=E\left[|f_{n_i}-f|<\frac{1}{2^i},i=k,k+1,\cdots\right].$$

往证 $\{f_{n_i}\}$ 在 $F_k(k=1,2,\cdots)$ 上收敛于 f. 若 $x\in F_k$，则当 $i\geqslant k$ 时，有

---

① 黎斯(F. Riesz, 1880—1956)，匈牙利数学家.

$|f_{n_i}-f|<\frac{1}{2^i}$. 对任意的 $\varepsilon>0$，存在 i_0 使 $\frac{1}{2^{i_0}}<\varepsilon$，取 $N=\max\{k,i_0\}$，则当 $i\geqslant N$ 时，有 $|f_{n_i}(x)-f(x)|<\varepsilon$，所以 $f_{n_i}(x)\to f(x)(i\to\infty)$，又令 $F=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k$，则在 F 上 $\{f_{n_i}\}$ 收敛于 f.

以下证明 $m(E-F)=0$.

$$\begin{aligned}E-F&=E-\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k\\&=\bigcap_{k=1}^{\infty}(E-F_k)\\&=\bigcap_{k=1}^{\infty}(E-\bigcap_{i=k}^{\infty}(E-E_i))\\&=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty}(E-(E-E_i))\\&=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty}E_i\\&=\overline{\lim_{k\to\infty}}E_k\end{aligned}$$

对任何 $k\in\mathbf{N}^+$，有 $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}E_k\subset\bigcup\limits_{i=k}^{\infty}E_i$，所以对任何 $k\in\mathbf{N}^+$，有

$$\begin{aligned}m(E-F)&=m(\overline{\lim_{k\to\infty}}E_k)\\&\leqslant m(\bigcup_{i=k}^{\infty}E_i)\\&\leqslant\sum_{i=k}^{\infty}\frac{1}{2^i}\\&=\frac{1}{2^{k-1}}(k=1,2,\cdots),\end{aligned}$$

因此 $m(E-F)=0$.

综上，$\{f_{n_i}\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 f，定理得证.

定理 4.4.2（Lebesgue） 设 $mE<\infty$，f 和 $f_n(n=1,2,\cdots)$ 都是 E 上几乎处处有限的可测函数. 且 $f_n\to f\ a.e.$ 于 E，那么 $f_n\xrightarrow{m}f$.

证明 对任意的 $\sigma>0$，为叙述方便，记

$$E_n(\sigma)=E[|f_n-f|\geqslant\sigma],n=1,2,\cdots.$$

对每个 $i\in\mathbf{N}^+$，令 $F_i(\sigma)=\bigcup\limits_{n=i}^{\infty}E_n(\sigma)=\bigcup\limits_{n=i}^{\infty}E[|f_n-f|\geqslant\sigma]$.

令 $E_1 = E[f_n \to f]$, $A = E[|f| = +\infty]$, $A_n = E[|f_n| = +\infty]$.

$$E_0 = A \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cup (E - E_1)$$

则

$$mE_0 \leqslant mA + \sum_{n=1}^{\infty} mA_n + m(E - E_1) = 0 ,$$

所以 $mE_0 = 0$.

往证 $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i(\sigma) \subset E_0$.

事实上,任取 $x_0 \overline{\in} E_0$,则 $f_n(x_0)(n = 1,2,\cdots)$ 和 $f(x_0)$ 都是有限实数,且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$,

所以对任意的 $\sigma > 0$,存在 i_0 ,当 $n \geqslant i_0$ 时,有 $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \sigma$,

因此 $x_0 \overline{\in} F_{i_0}(\sigma)$,所以 $x_0 \overline{\in} \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i(\sigma)$,这样 $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i(\sigma) \subset E_0$.

由 $F_i(\sigma)$ 的定义,有

$$F_{i+1}(\sigma) = \bigcup_{n=i+1}^{\infty} E_n(\sigma) \subset \bigcup_{n=i}^{\infty} E_n(\sigma) = F_i(\sigma), i = 1,2,\cdots ,$$

因而 $\{F_i(\sigma)\}$ 是单调减少的可测集列,并且 $mF_1(\sigma) \leqslant mE < \infty$.

由定理 3.2.9,有

$$\begin{aligned}
\lim_{i\to\infty} m(\bigcup_{n=i}^{\infty} E_n(\sigma)) &= \lim_{i\to\infty} mF_i(\sigma) \\
&= m(\lim_{i\to\infty} F_i(\sigma)) \\
&= m(\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i(\sigma)) \\
&\leqslant mE_0 \\
&= 0 .
\end{aligned}$$

而对任何 $k \in \mathbf{N}^+$, $E_k(\sigma) \subset \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n(\sigma)$,所以 $mE_k(\sigma) \leqslant m(\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n(\sigma))$,令 $k \to \infty$,有

$$\lim_{k\to\infty} mE_k(\sigma) = \lim_{k\to\infty} mE[|f_k - f| \geqslant \sigma] = 0 ,$$

因此 $f_n \xrightarrow{m} f$. 定理得证.

注:(1)本定理的条件 $mE < \infty$ 是必不可少的,见例 4.4.2.

(2)本定理说明,在 $mE<\infty$ 的条件下,依测度收敛弱于 a.e. 收敛.

下面的定理说明,依测度收敛的极限函数在忽略不计一个零测度集上的函数值的意义下是唯一的.

定理 4.4.3 设 $f_n(x)\xrightarrow{m}f(x)$, $f_n(x)\xrightarrow{m}g(x)$,则 $f(x)=g(x)$ a.e. 于 E.

证明 因为 $|f(x)-g(x)|\leqslant|f(x)-f_k(x)|+|f_k(x)-g(x)|(k=1,2,\cdots)$,所以对任何 $n\in\mathbf{N}^+$,有

$$E\left[|f-g|\geqslant\frac{1}{n}\right]\subset E\left[|f-f_k|\geqslant\frac{1}{2n}\right]\cup E\left[|f_k-g|\geqslant\frac{1}{2n}\right],$$

因此

$$mE\left[|f-g|\geqslant\frac{1}{n}\right]\leqslant mE\left[|f-f_k|\geqslant\frac{1}{2n}\right]+mE\left[|f_k-g|\geqslant\frac{1}{2n}\right].$$

令 $k\to\infty$,有 $mE\left[|f-g|\geqslant\frac{1}{n}\right]=0$,而

$$E[f\neq g]=\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left[|f-g|\geqslant\frac{1}{n}\right],$$

从而

$$\begin{aligned}mE[f\neq g]&=m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left[|f-g|\geqslant\frac{1}{n}\right]\right)\\&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}mE\left[|f-g|\geqslant\frac{1}{n}\right]\\&=0\end{aligned}$$

于是 $f(x)=g(x)$ a.e. 于 E.

例 4.4.3 设 $E\subset\mathbf{R}$, $f(x)$ 是 E 上的几乎处处有限的可测函数,则存在 $\mathbf{R}$ 上的连续函数列 $\{g_k\}$,使得 $\lim\limits_{k\to\infty}g_k(x)=f(x)$a.e. 于 E.

证明 因为 $f(x)$ 在 E 上可测,由鲁金定理可知,对任何正整数 n ,存在 E 的闭子集 E_n ,使得 $m(E-E_n)<\frac{1}{n}$,同时存在 $\mathbf{R}$ 上的连续 $\varphi_n(x)$,使得当 $x\in E_n$ 时,有 $\varphi_n(x)=f(x)$. 所以对任意的 $\sigma>0$, $E[|f-\varphi_n|\geqslant\sigma]\subset E-E_n$ 成立,所以

$$mE[|f-\varphi_n|\geqslant\sigma]\leqslant m(E-E_n)<\frac{1}{n},n=1,2,\cdots,$$

因而

$$\lim_{n\to\infty} mE[|f-\varphi_n|\geqslant\sigma]=0,$$

于是 $\varphi_n \xrightarrow{m} f$.

由 F. Riesz 定理，存在 $\{\varphi_n\}$ 的子列 $\{\varphi_{n_k}\}$ ，使 $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_{n_k}(x)=f(x)a.e.$ 于 E . 记 $\varphi_{n_k}(x)=g_k(x)$ ，则命题得证.

习　题

1. 证明 $f(x)$ 在 E 上可测的充要条件是对任何有理数 r ，$E[f>r]$ 是可测集.

2. 设 M 是区间 $[0,1]$ 上的一个不可测子集，定义

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\in M;\\ -x, & x\in[0,1]-M.\end{cases}$$

问 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是否可测？$|f|$ 在 $[0,1]$ 上是否可测？

3. 若 $f_n\xrightarrow{m}f$ ，证明对于 $\{f_n\}$ 的任何子列 $\{f_{n_j}\}$ 都有 $f_{n_j}\xrightarrow{m}f$.

4. 设 f,g 和 $f_1,f_2,\cdots,f_n,\cdots$ 都是 E 上几乎处处有限的可测函数. $f_n\xrightarrow{m}f$ 且 $f_n(n=1,2,\cdots)\leqslant g\ a.e.$ 于 E ，则 $f\leqslant g\ a.e.$ 于 E .

5. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的实值函数，那么 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续的充要条件是：对 $\mathbf{R}$ 上的任何开集 G ，$f^{-1}(G)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的开集.

6. 设 $mE<\infty$ ，若 $\{f_n\}$ 在 E 上依测度收敛于 f ，而且 $f_n=g\ a.e.$ 于 E ，则 $\{f_n\}$ 在 E 上依测度收敛于 g .

7. 设 f 是定义在可测集 E 上的实值函数，则 f 是 E 上可测函数的充要条件是对任何开集 G ，$f^{-1}(G)$ 是可测集.

8. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，$g(x)$ 为 $[a,b]$ 上的可测函数，则 $f[g(x)]$ 是可测函数.

9. 设 f 和 $f_1,f_2,\cdots,f_n,\cdots$ ，都是可测集 E 上几乎处处有限的可测函数. 若对任何 $\delta>0$ ，存在可测集 $E_\delta\subset E$ ，使得 $mE_\delta<\delta$ ，且在 $E-E_\delta$ 上 $\{f_n\}$ 一致收敛于 f ，则 $f_n\xrightarrow{m}f$.

10. 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的可测函数，且在某个点 t_0 处连续，若对任意的 $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$，有 $f(t_1 + t_2) = f(t_1) + f(t_2)$，证明必有常数 c，使得 $f(t) = ct$.

11. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上处处可导的实值函数. 证明 $f'(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数.

12. 设 $mE < \infty$，几乎处处有限的可测函数列 $\{f_n(x)\}$ 和 $\{g_n(x)\}$，$n=1,2,\cdots$. 分别依测度收敛于 $f(x)$ 和 $g(x)$，证明：

(1) $f_n(x)g_n(x) \xrightarrow{m} f(x) \cdot g(x)$;

(2) $f_n(x) + g_n(x) \xrightarrow{m} f(x) + g(x)$;

(3) $\min\{f_n(x), g_n(x)\} \xrightarrow{m} \min\{f(x), g(x)\}$;

(4) $\max\{f_n(x), g_n(x)\} \xrightarrow{m} \max\{f(x), g(x)\}$.

第 5 章　勒贝格积分

到现在我们为了建立勒贝格积分已经做了必要的准备工作，我们有了可测集、可测函数的概念和理论，定义 Lebesgue 积分的条件已经成熟. 本章我们讨论 Lebesgue 积分的基本内容.

5.1　测度有限集上有界可测函数的积分

1. 有界可测函数积分的定义

定义 5.1.1　设 $E\subset \mathbf{R}^n, mE<\infty, f$ 是定义在 E 上的有界可测函数，即存在 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，使 $f(E)\subset(\alpha,\beta)$. 若 $D:\alpha=l_0<l_1<\cdots<l_n=\beta$ 是 $[\alpha,\beta]$ 的任一分点组，则记

$$\delta(D)=\max_{1\leqslant k\leqslant n}(l_k-l_{k-1}), E_k=E[l_{k-1}<f\leqslant l_k].$$

对任意的 $\eta_k\in[l_{k-1},l_k]$，作和式

$$S(D)=\sum_{k=1}^{n}\eta_k mE_k,$$

称 $S(D)$ 为 f 关于分点组 D 的一个和数.

如果存在常数 A，使得对任意的 $\varepsilon>0$，总有 $\delta>0$，当任意分点组 D 满足 $\delta(D)<\delta$ 时，有

$$|S(D)-A|<\varepsilon.$$

换句话说，$\lim\limits_{\delta(D)\to 0}S(D)=A$ 时，则称 f 在 E 上是 Lebesgue 可积的，并称 A 为 f 在 E 上的 Lebesgue 积分，记作

$$A=\int_E f(x)dm .$$

有时为了简便也记为 $A=\int_E f(x)\mathrm{d}x$，若 $E=[a,b]$，则记 $A=\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x$.
当 $f(x)$ 是 Riemann 可积函数时，其 Riemann 积分仍沿用数学分析中的记法，记做 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

对 $[\alpha,\beta]$ 的任意分点组 $D:\alpha=l_0<l_1<\cdots<l_n=\beta$，有两个特殊的和数尤其重要：

$$\bar{S}(D)=\sum_{k=1}^{n} l_k mE[l_{k-1}<f\leqslant l_k],$$

$$\underline{S}(D)=\sum_{k=1}^{n} l_{k-1} mE[l_{k-1}<f\leqslant l_k].$$

称 $\bar{S}(D)$ 和 $\underline{S}(D)$ 分别为 f 关于分点组 D 的大和数与小和数. 显然对于 f 的任一和数 $S(D)$，有 $\underline{S}(D)\leqslant S(D)\leqslant \bar{S}(D)$.

因此，极限 $\lim\limits_{\delta(D)\to 0} S(D)$ 存在当且仅当 $\lim\limits_{\delta(D)\to 0}\underline{S}(D)$ 和 $\lim\limits_{\delta(D)\to 0}\bar{S}(D)$ 都存在且相等.

定理 5.1.1 设 $E\subset \mathbf{R}^n$，$mE<\infty$，f 是 E 上的有界可测函数，则 f 在 E 上 Lebesgue 可积.

证明 因为 $f(x)$ 是有界可测函数，所以有 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，使 $f(E)\subset(\alpha,\beta)$.

设 $\underline{S}=\sup\limits_D\{\underline{S}(D)\}$，$\bar{S}=\inf\limits_D\{\bar{S}(D)\}$. 即 $\underline{S}$ 是对 (α,β) 的所有分点组 D 的小和的上确界，$\bar{S}$ 是对 (α,β) 的所有分点组 D 的大和的下确界.

往证 $\underline{S}=\bar{S}$.

首先证明 $\underline{S}\leqslant\bar{S}$. 设 $D:l_0<l_1<\cdots<l_n$，$D':l'_0<l'_1<\cdots<l'_m$. 是对 (α,β) 任意的两个分点组，则 $\underline{S}(D)\leqslant\underline{S}$，$\bar{S}(D)\geqslant\bar{S}$.

将 D 和 D' 合并起来构成一个新的分点组，记为 D''，D'' 可以看成分点组 D 中又加进了一些分点，称为 D 的一个加细. 假设对任意的 k，l_{k-1} 与 l_k 之间加入了某些分点 $l'_{j-1},l'_j,l'_{j+1},\cdots,l'_{j+j_k}$（把 l_{k-1} 和 l_k 算在内）即

$$l_{k-1}=l'_{j-1}<l'_j<l'_{j+1}<\cdots<l'_{j+j_k}=l_k,$$

于是

$$\begin{aligned}\underline{S}(D) &= \sum_{k=1}^{n} l_{k-1} mE[l_{k-1} < f \leqslant l_k] \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=j}^{j+j_k} l_{k-1} mE[l'_{i-1} < f \leqslant l'_i] \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=j}^{j+j_k} l'_{i-1} mE[l'_{i-1} < f \leqslant l'_i] \\ &= \underline{S}(D'') \\ &\leqslant \bar{S}(D'') \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=j}^{j+j_k} l'_i mE[l'_{i-1} < f \leqslant l'_i] \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=j}^{j+j_k} l_k mE[l'_{i-1} < f \leqslant l'_i] \\ &= \sum_{k=1}^{n} l_k mE[l_{k-1} < f \leqslant l_k] \\ &= \bar{S}(D).\end{aligned}$$

这样，有

$$\underline{S}(D) \leqslant \underline{S}(D'') \leqslant \bar{S}(D'') \leqslant \bar{S}(D),$$

同样的方法，有

$$\underline{S}(D') \leqslant \underline{S}(D'') \leqslant \bar{S}(D'') \leqslant \bar{S}(D').$$

这说明，对于任一分点组 D，加细后的分点组 D''，其大和数不增，小和数不减. 且由

$$\underline{S}(D) \leqslant \bar{S}(D'') \leqslant \bar{S}(D'),$$

$$\underline{S}(D') \leqslant \underline{S}(D'') \leqslant \bar{S}(D),$$

说明对于任意一个分点组的小和数不超过其他任意一个分点组的大和数. 此即

$$\sup_D\{\underline{S}(D)\} \leqslant \inf_D\{\bar{S}(D)\},$$

于是 $\underline{S} \leqslant \bar{S}$.

再证明 $\underline{S} = \bar{S}$. 设 D 为任意的分点组，则由于

$$\underline{S}(D) \leqslant \underline{S} \leqslant \bar{S} \leqslant \bar{S}(D),$$

有

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant \bar{S} - \underline{S} &\leqslant \bar{S}(D) - \underline{S}(D) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (l_k - l_{k-1}) mE[l_{k-1} < f \leqslant l_k] \\
&\leqslant \delta(D) mE .
\end{aligned}
$$

这样对任意的 $\varepsilon > 0$. 取分点组 D^*, 使 $\delta(D^*) < \frac{\varepsilon}{mE}$, 则 $0 \leqslant \bar{S} - \underline{S} < \varepsilon$. 由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的, 有 $\bar{S} = \underline{S}$. 令 $S = \bar{S} = \underline{S}$, 往证 $\lim\limits_{\delta(D) \to 0} S(D) = S$. 注意到

$$
\underline{S}(D) \leqslant S \leqslant \bar{S}(D), \underline{S}(D) \leqslant S(D) \leqslant \bar{S}(D),
$$

所以

$$
S - S(D) \leqslant \bar{S}(D) - \underline{S}(D) \leqslant \delta(D) mE,
$$

$$
S(D) - S \leqslant \bar{S}(D) - \underline{S}(D) \leqslant \delta(D) mE .
$$

因此

$$
| S(D) - S | \leqslant \bar{S}(D) - \underline{S}(D) \leqslant \delta(D) mE .
$$

所以

$$
\lim_{\delta(D) \to 0} S(D) = S,
$$

即 f 在 E 上 Lebesgue 可积.

注:本定理还证明了 $f(x)$ 在 E 上 Lebesgue 可积,则

$$
\int_E f(x) \mathrm{d}x = \sup_D \{\underline{S}(D)\} = \inf_D \{\bar{S}(D)\} .
$$

例 5.1.1 考察 $[0,1]$ 上的 Dirichlet[①] 函数 $D(x)$.

$$
D(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \text{ 是有理数;} \\ 0, & x \in [0,1] \text{ 是无理数.} \end{cases}
$$

则 $D(x)$ 在 $[0,1]$. 上 Lebesgue 可积,且 $\int_{[0,1]} D(x) \mathrm{d}x = 0$

证明 $D([0,1]) = \{0,1\} \subset [-1,2]$,对于$(-1,2)$ 的任一组分点 $D: -1 = l_0 < l_1 < \cdots < l_n = 2$.

---

① 狄利克雷(Dirichlet,1805—1859),德国数字家.

当 $\delta(D)=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{l_k-l_{k-1}\}\to 0$ 时，0 和 1 不能在同一个小区间上.

设 $0\in(l_{i-1},l_i]$，$1\in(l_{j-1},l_j]$，则 $1\leqslant i<j\leqslant n$. 取 $\eta_i\in[l_{i-1},l_i]$，则

$$|\eta_i|=|\eta_i-0|\leqslant|l_i-l_{i-1}|\leqslant\delta(D),$$

因此，当 $\delta(D)\to 0$ 时，$\eta_i\to 0$. 而 $E[l_{j-1}<D(x)\leqslant l_j]\subset\mathbf{Q}$（有理数集），所以

$$mE[l_{j-1}<D(x)\leqslant l_j]=0.$$

当 $k\neq i,j$ 时，由于 $E[l_{k-1}<D(x)\leqslant l_k]=\varnothing$，则

$$mE[l_{k-1}<D(x)\leqslant l_k]=0.$$

因此

$$\begin{aligned}S(D)&=\sum_{k=1}^{n}\eta_k mE[l_{k-1}<D(x)\leqslant l_k]\\&=\eta_i mE[l_{i-1}<D(x)\leqslant l_i]+\eta_j mE[l_{j-1}<D(x)\leqslant l_j]\\&=\eta_i mE[l_{i-1}<D(x)\leqslant l_i]\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{\delta(D)\to 0}S(D)=\lim_{\delta(D)\to 0}\eta_i mE[l_{i-1}<D(x)\leqslant l_i]=0,$$

即

$$\int_{[0,1]}D(x)\mathrm{d}x=0.$$

我们知道 $D(x)$ 在 $[0,1]$ 上不是 Riemann 可积的，所以 Lebesgue 可积函数类比 Riemann 可积函数类要广.

2. 有界可测函数积分的性质

定理 5.1.2　设 $E\subset\mathbf{R}^n$，$mE<\infty$，$f(x)$ 和 $g(x)$ 都是 E 上的有界可测函数，则

(1) 对任意的 $a\in\mathbf{R}$，$\int_E af(x)\mathrm{d}x=a\int_E f(x)\mathrm{d}x$；

(2) 若 $E_1,\cdots,E_m$ 是 E 的可测子集，$E_i\cap E_j=\varnothing(i\neq j)$，$E=\bigcup\limits_{i=1}^{m}E_i$，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_{E_1}f(x)\mathrm{d}x+\cdots+\int_{E_m}f(x)\mathrm{d}x;$$

(3) $\int_E(f(x)+g(x))\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x+\int_E g(x)\mathrm{d}x$；

(4) 当 $f(x) \leqslant g(x) a.e.$ 于 E 时，$\int_E f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E g(x)\mathrm{d}x$.

证明 证(2). 只须就 $m = 2$ 的情形进行证明.

设 $f(E) \subset (\alpha,\beta)$，对 (α,β) 的任一分点组 $D: \alpha = l_0 < l_1 < \cdots < l_n = \beta$，令 $E_{1i} = E_1[l_{i-1} < f \leqslant l_i], E_{2i} = E_2[l_{i-1} < f \leqslant l_i], i = 1,2,\cdots,n$. 那么

$$E_i = E_{1i} \cup E_{2i} = E[l_{i-1} < f \leqslant l_i],$$

且 $E_{1i} \cap E_{2i} = \varnothing$，所以

$$mE_i = mE_{1i} + mE_{2i}, i = 1,2,\cdots,n .$$

对于分点组 D，用 $\bar{S}_E(D), \bar{S}_{E_1}(D), \bar{S}_{E_2}(D)$ 分别表示 f 在 E, E_1, E_2 上对应 D 的大和数.

$$\begin{aligned}\bar{S}_E(D) &= \sum_{i=1}^{n} l_i mE_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} l_i mE_{1i} + \sum_{i=1}^{n} l_i mE_{2i} \\ &= \bar{S}_{E_1}(D) + \bar{S}_{E_2}(D)\end{aligned}$$

该等式对任意的分点组 D 成立.

对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 (α,β) 的分点组 D_1，使得

$$\bar{S}_{E_1}(D_1) < \inf_D\{\bar{S}_{E_1}(D)\} + \frac{\varepsilon}{2},$$

也存在 (α,β) 的分点组 D_2，使得

$$\bar{S}_{E_2}(D_2) < \inf_D\{\bar{S}_{E_2}(D)\} + \frac{\varepsilon}{2} .$$

设 $D^* = D_1 \cup D_2$，则 D^* 即是 D_1 也是 D_2 的加细，因此

$$\begin{aligned}\int_E f(x)\mathrm{d}x &= \inf_D\{\bar{S}_E(D)\} \\ &\leqslant \bar{S}_E(D^*) \\ &= \bar{S}_{E_1}(D^*) + \bar{S}_{E_2}(D^*) \\ &\leqslant \bar{S}_{E_1}(D_1) + \bar{S}_{E_2}(D_2) \\ &< \int_{E_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{E_2} f(x)\mathrm{d}x + \varepsilon .\end{aligned}$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，所以

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{E_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{E_2} f(x)\mathrm{d}x .$$

同样考虑小和数和 $\int_E f(x) = \sup_D\{\underline{S}(D)\}$ 可证明相反的不等式，所以

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_{E_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{E_2} f(x)\mathrm{d}x .$$

证(3). 设 $f(E) \subset (\alpha,\beta)$，$g(E) \subset (\alpha',\beta')$，对 (α,β) 的任一分点组 $D:\alpha = l_0 < l_1 < \cdots < l_n = \beta$，对 (α',β') 的任一分点组 $D':\alpha' = l'_0 < l'_1 < \cdots < l'_m = \beta'$. 令

$$\begin{aligned}
E_i &= E[l_{i-1} < f \leqslant l_i],\\
E'_j &= E[l'_{j-1} < g \leqslant l'_j],\\
E_{ij} &= E_i[l'_{j-1} < g \leqslant l'_j]\\
&= E[l_{i-1} < f \leqslant l_i , l'_{j-1} < g \leqslant l'_j]\\
&= E'_j[l_{i-1} < f \leqslant l_i],(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m).
\end{aligned}$$

由此可知，E 可分解为有限个互不相交的可测集的并.

$$E = \bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m} E_{ij} = \bigcup_{i=1}^{n} E_i = \bigcup_{j=1}^{m} E'_j .$$

于是

$$\begin{aligned}
\int_{E_{ij}} (f+g)\mathrm{d}x &\leqslant (l_i + l'_j)mE_{ij}\\
&= l_i mE_{ij} + l'_j mE_{ij} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_E (f+g)\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\int_{E_{ij}} (f+g)\mathrm{d}x\\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} l_i mE_i + \sum_{j=1}^{m} l'_j mE'_j\\
&= \bar{S}_f(D) + \bar{S}_g(D') .
\end{aligned}$$

该不等式对 (α,β) 的任意分点组 D 和 (α',β') 的任意分点组 D' 都成立. 因为

$$\int_E f\mathrm{d}x = \inf_D\{\bar{S}_f(D)\},\int_E g\mathrm{d}x = \inf_D\{\bar{S}_f(D')\}.$$

所以对任意的 $\varepsilon > 0$，有 (α,β) 的分点组 D_1 和 (α',β') 的分点组 D'_1，使

$$\bar{S}_f(D_1) < \int_E f(x)\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\bar{S}_g(D'_1) < \int_E g(x)\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此可得

$$\int_E (f(x)+g(x))\mathrm{d}x \leqslant \bar{S}_f(D_1) + \bar{S}_g(D'_1)$$

$$< \int_E f(x)\mathrm{d}x + \int_E g(x)\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

由 $\varepsilon > 0$ 是任意的，有

$$\int_E (f(x)+g(x))\mathrm{d}x \leqslant \int_E f(x)\mathrm{d}x + \int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

同样考虑小和数及所有小和数的上确界可得相反的不等式. 因而

$$\int_E (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x + \int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

证(1).

引理 1 若 $f(x) \equiv c$（常数），$x \in E$. 则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = cmE.$$

因为存在 $\alpha,\beta \in \mathbf{R}$，使 $\alpha < c < \beta$. 对 (α,β) 的任一分点组 $\alpha = l_0 < l_1 < \cdots < l_n = \beta$. 若 $c \in (l_{i-1}, l_i]$, $1 \leqslant i \leqslant n$，则 $mE[l_{i-1} < f \leqslant l_i] = mE$，任取 $\eta_i \in (l_{i-1}, l_i]$，则

$$|\eta_i - c| \leqslant l_i - l_{i-1} \leqslant \delta(D).$$

因此当 $\delta(D) \to 0$ 时，$\eta_i \to c$.

而当 $k \neq i$ 时，$E[l_{k-1} < f(x) \leqslant l_k] = \varnothing$，因而 $mE[l_{k-1} < f(x) \leqslant l_k] = 0$，于是

$$\lim_{\delta(D)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \eta_k mE[l_{k-1} < f(x) \leqslant l_k] = \lim_{\delta(D)\to 0} \eta_i mE[l_{i-1} < f(x) \leqslant l_i] = cmE,$$

即 $\int_E f(x)\mathrm{d}x = cmE$.

以下证明 $\int_E af(x)\mathrm{d}x = a\int_E f(x)\mathrm{d}x$.

若 $a=0$，则 $af(x)\equiv 0, x\in E$. 由引理 1

$$\int_E af(x)\mathrm{d}x = 0\cdot mE = 0 = 0\int_E f(x)\mathrm{d}x = a\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

若 $a>0$，设 $\alpha < af(x) < \beta$，对 (α,β) 的任一分点组

$$D: \alpha = l_0 < l_1 < \cdots < l_n = \beta.$$

由于 $\frac{\alpha}{a} < f(x) < \frac{\beta}{a}$，分点组 D 相当于 $(\frac{\alpha}{a},\frac{\beta}{a})$ 的一个分点组

$$D_1: \frac{\alpha}{a} = \frac{l_0}{a} < \frac{l_1}{a} < \cdots < \frac{l_n}{a} = \frac{\beta}{a}.$$

任取 $\eta_i\in[l_{i-1},l_i]$，则 $\frac{\eta_i}{a}\in\left[\frac{l_{i-1}}{a},\frac{l_i}{a}\right]$.

$$\sum_{i=1}^n \eta_i mE[l_{i-1} < af(x)\leqslant l_i] = \sum_{i=1}^n \eta_i mE\left[\frac{l_{i-1}}{a} < f(x)\leqslant \frac{l_i}{a}\right],$$

而

$$\lim_{\delta(D_1)\to 0} a\sum_{i=1}^n \frac{\eta_i}{a} mE\left[\frac{l_{i-1}}{a} < f(x)\leqslant \frac{l_i}{a}\right] = a\lim_{\delta(D_1)\to 0}\sum_{i=1}^n \frac{\eta_i}{a} mE\left[\frac{l_{i-1}}{a} < f(x)\leqslant \frac{l_i}{a}\right]$$
$$= a\int_E f(x)\mathrm{d}x,$$

并且

$$\delta(D)\to 0 \Leftrightarrow \delta(D_1)\to 0,$$

因此

$$\int_E af(x)\mathrm{d}x = \lim_{\delta(D)\to 0}\sum_{i=1}^n \eta_i mE[l_{i-1} < af(x)\leqslant l_i]$$
$$= \lim_{\delta(D_1)\to 0} a\sum_{i=1}^n \frac{\eta_i}{a} mE\left[\frac{l_{i-1}}{a} < f(x)\leqslant \frac{l_i}{a}\right]$$
$$= a\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

若 $a<0$，则 $-a>0$，则

$$0 = \int_E [af(x) + (-a)f(x)]\mathrm{d}x$$
$$= \int_E af(x)\mathrm{d}x + \int_E (-a)f(x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_E af(x)\mathrm{d}x + (-a)\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

于是

$$\int_E af(x)\mathrm{d}x = -(-a)\int_E f(x)\mathrm{d}x = a\int_E f(x)\mathrm{d}x .$$

综上，对任意的 $a \in \mathbf{R}$，有

$$\int_E af(x)\mathrm{d}x = a\int_E f(x)\mathrm{d}x .$$

证(4).

引理 2 定义在零测度集上的任何有界函数是可积的，而且积分为零.

事实上，设 $f(x)$ 定义在 E 上，$mE = 0$，设 $\alpha < f(x) < \beta, x \in E$. 对 (α,β) 的任一分点组 $D:\alpha = l_0 < l_1 < \cdots < l_n = \beta$，则由 $E[l_{i-1} < f(x) \leqslant l_i] \subset E$，所以

$$mE[l_{i-1} < f(x) \leqslant l_i] = 0, i = 1,2,\cdots,n .$$

于是，任取 $\eta_i \in [l_{i-1}, l_i]$，$\sum_{i=1}^{n} \eta_i mE[l_{i-1} < f(x) \leqslant l_i] = 0$，因此

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\delta(D)\to 0}\sum_{i=1}^{n} \eta_i mE[l_{i-1} < f(x) \leqslant l_i] = 0 .$$

为证(4)，令 $F(x) = g(x) - f(x)$，则 $F(x) \geqslant 0$ $a.e.$ 于 E.

由引理 2，不妨设 $F(x) \geqslant 0, x \in E$.

设 $F(E) \subset (\alpha,\beta)$. 对 (α,β) 的任一分点组 $D:\alpha = l_0 < l_1 < \cdots < l_n = \beta$. 对每一个 $1 \leqslant i \leqslant n$，考察 $\eta_i mE[l_{i-1} < F \leqslant l_i]$，其中 $\eta_i \in [l_{i-1}, l_i]$，若 $\eta_i < 0$，则当 $\delta(D) \to 0$ 时，$l_i < 0$，此时 $E[l_{i-1} < F \leqslant l_i] = \varnothing$，因而

$$\eta_i mE[l_{i-1} < F \leqslant l_i] = 0 .$$

若 $\eta_i \geqslant 0$，则由 $mE[l_{i-1} < F \leqslant l_i] \geqslant 0$ 知 $\eta_i mE[l_{i-1} < F \leqslant l_i] \geqslant 0$，因此

$$\int_E F(x)\mathrm{d}x = \lim_{\delta(D)\to 0}\sum_{i=1}^{n} \eta_i mE[l_{i-1} < F \leqslant l_i] \geqslant 0,$$

于是

$$\begin{aligned}\int_E F(x)\mathrm{d}x &= \int_E (g(x) - f(x))\mathrm{d}x \\ &= \int_E [g(x) + (-f(x))]\mathrm{d}x \\ &= \int_E g(x)\mathrm{d}x + \int_E -f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= \int_E g(x)\mathrm{d}x - \int_E f(x)\mathrm{d}x$$
$$\geqslant 0.$$

因而

$$\int_E g(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

推论　设 $mE < \infty$，且 $f(x)$ 是 E 上的有界可测函数，则 $\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_E |f(x)|\mathrm{d}x$.

证明　因为 $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$，所以由定理 5.1.2 的(4)和(1)有

$$-\int_E |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_E f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E |f(x)|\mathrm{d}x,$$

即

$$\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_E |f(x)|\mathrm{d}x.$$

定理 5.1.3　设 $mE < \infty$，$f(x)$ 是 E 上的有界可测函数，若 $f(x) \geqslant 0$ *a.e.* 于 E，且 $\int_E f(x)\mathrm{d}x = 0$，则 $f(x) = 0$ *a.e.* 于 E.

证明　因为 $f(x) \geqslant 0$ *a.e.* 于 E，则 $mE[f<0] = 0$，且 $\int_{E[f<0]} f(x)\mathrm{d}x = 0$，若能证明 $mE[f>0] = 0$，则定理得证.

$$E = E[f=0] \cup E[f<0] \cup E[f>0].$$

令 $E_n = E\left[f \geqslant \frac{1}{n}\right]$，$n = 1,2,\cdots$，则 $E[f>0] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$，对任意取定的 $n \in \mathbf{N}^+$，有

$$0 = \int_E f(x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_{E[f<0]} f(x)\mathrm{d}x + \int_{E[f\geqslant 0]} f(x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_{E[f\geqslant 0]} f(x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_{E_n} f(x) + \int_{E[f\geqslant 0]-E_n} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\geqslant \int_{E_n} f(x) \geqslant \frac{1}{n} mE_n \ ,$$

所以 $mE_n = 0, n = 1,2,\cdots$，因此

$$mE[f > 0] = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} mE_n = 0,$$

于是 $f(x) = 0$ $a.e.$ 于 E.

5.2 一般可测集上一般可测函数的积分

对于广义 Riemann 积分，有积分区间无限的广义积分和无界函数的广义积分，对于 Lebesgue 积分也有无限测度集上的积分和无界可测函数的积分的情形. 本节的任务就是讨论这种一般情形的积分.

1. 有限可测集上无界可测函数的积分

(1) 非负函数情形

设 $E \subset \mathbf{R}^n, mE < \infty, f(x)$ 是 E 上的非负可测函数. $N \in \mathbf{R}^+$，称 $[f]_N(x) = \min\{f(x), N\}$ 为 $f(x)$ 的 N- **截断函数**.

有了 N- 截断函数的概念，我们可以构造有界可测函数列 $\{f_n(x)\}$. 其中 $f_n(x) = [f]_n(x)$ ($n = 1,2,\cdots$). 显然，这样构造的函数列 $\{f_n\}$ 满足:

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \cdots \leqslant f_n(x) \leqslant \cdots, x \in E.$$

并且 $\lim f_n(x) = f(x)$，因而

$$\int_E f_1(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E f_2(x)\mathrm{d}x \leqslant \cdots \leqslant \int_E f_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \cdots,$$

所以极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x$ 存在(可能是 $+\infty$).

定义 5.2.1 设 $E \subset \mathbf{R}^n, mE < \infty, f(x)$ 是 E 上的非负可测函数. $f_n(x) = [f]_n(x), x \in E, n = 1,2,\cdots$. 称 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x$ 为 $f(x)$ 在 E 上的 Lebesgue 积分. 记为: $\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x$.

若 $\int_E f_n(x)\mathrm{d}x$ 是有限数，称 $f(x)$ 在 E 上可积，若 $\int_E f_n(x)\mathrm{d}x \leqslant +\infty$，称 $f(x)$

在 E 上有积分值.

(2) 一般函数情形

定义 5.2.2　设 $f(x)$ 在 $E\subset \mathbf{R}^n$ 上可测,如果 $f^+(x)$ 和 $f^-(x)$ 中至少有一个在 E 上可积,那么称 $\int_E f^+(x)\mathrm{d}x-\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$ 为 $f(x)$ 在 E 上的 Lebesgue 积分.记为:$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E f^+(x)\mathrm{d}x-\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$.

当 $f^+(x)$ 和 $f^-(x)$ 都在 E 上可积时,称 f 在 E 上可积.

定义中要求 $f^-(x)$ 和 $f^-(x)$ 中至少有一个在 E 上可积,是因为如果 $f^+(x)$ 和 $f^-(x)$ 在 E 上都不可积,则 $\int_E f^+(x)\mathrm{d}x=+\infty$ 且 $\int_E f^-(x)\mathrm{d}x=+\infty$,此时

$$\int_E f^+(x)\mathrm{d}x-\int_E f^-(x)\mathrm{d}x=(+\infty)-(+\infty),$$

没有意义,因而没有积分值.

若 $f^+(x)$ 和 $f^-(x)$ 中至少有一个在 E 上可积,则 $\int_E f^+(x)\mathrm{d}x-\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$ 有意义,但可能为 $+\infty$ 或 $-\infty$. 无论 $\int_E f(x)\mathrm{d}x$ 是有限数、$+\infty$ 或 $-\infty$,我们都说 $f(x)$ 在 E 上有积分值,当 $\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right|<+\infty$ 时,称 f 在 E 上可积.

2. 非有限测度可测集上的积分

(1) $f(x)$ 是非负可测函数

设 $E\subset \mathbf{R}^n$,$mE=\infty$. 设

$$K_m=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid |x_i|\leqslant m, i=1,2,\cdots,n\}.$$

令 $E_m=E\cap K_m$,则 $mE_m<\infty(m=1,2,\cdots)$,且 $E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_m\subset\cdots$ 是单调增加集列,有 $\lim\limits_{m\to\infty}E_m=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}E_m=E$.

由前面讨论,非负可测函数 $f(x)$ 在每个 E_m 上有积分值 $\int_{E_m}f(x)\mathrm{d}x$. 记为 $J_m=\int_{E_m}f(x)\mathrm{d}x$. 则 $\{J_m\}$ 是单调增加数列,极限 $\lim\limits_{m\to\infty}J_m$ 存在(可能是 $+\infty$).

定义 5.2.3　设 $E\subset \mathbf{R}^n$,$mE=\infty$,$f(x)$ 是 E 上的非负可测函数. 称

$$\lim_{m\to\infty} J_m = \lim_{m\to\infty}\int_{E_m} f(x)\mathrm{d}x \ (E_m \text{ 如上说明})$$

为 $f(x)$ 在 E 上的 Lebesgue 积分，记为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty}\int_{E_m} f(x)\mathrm{d}x .$$

若 $\int_E f(x)\mathrm{d}x$ 是有限数，称 $f(x)$ 在 E 上可积，若 $\int_E f(x)\mathrm{d}x \leqslant +\infty$，称 $f(x)$ 在 E 上有积分值.

(2) $f(x)$ 是一般可测函数

定义 5.2.4 设 $E \subset \mathbf{R}^n$，$mE = \infty$，$f(x)$ 是 E 上的可测函数.

如果 $\int_E f^+(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$ 至少有一个是有限数，则称 $\int_E f^+(x)\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\mathrm{d}x$ 为 $f(x)$ 在 E 上的 Lebesgue 积分，记为 $\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E f^+(x)\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\mathrm{d}x$.

若 $\int_E f^+(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$ 都是有限数，称 $f(x)$ 在 E 上可积.

至此，非有限测度集和无界可测函数积分的概念已经建立，以下继续讨论积分的性质.

定理 5.2.1 (1) 设 $f(x)$ 是 E 上的函数，$mE = 0$，则 $\int_E f(x)\mathrm{d}x = 0$.

(2) 设 $f(x)$ 在 E 上可积，则 $mE[|f| = \infty] = 0$，即 $f(x)$ 是 E 上几乎处处有限的函数.

证明 (1) 由于 $mE = 0$，$f(x)$ 在 E 上可测，所以 $[f^+]_n$ 和 $[f^-]_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$，都是 E 上的有界可测函数，从而 $\int_E [f^+]_n(x)\mathrm{d}x = 0$，$\int_E [f^-]_n(x)\mathrm{d}x = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

所以

$$\int_E f^+(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_E [f^-]_n(x)\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_E f^-(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_E [f^-]_n(x)\mathrm{d}x = 0 .$$

于是

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E f^+(x)\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\mathrm{d}x = 0 .$$

(2) 令 $E_1 = E[f = +\infty]$，$E_2 = E[f = -\infty]$. 往证 $mE_1 = mE_2 = 0$. 用反证法，若 $mE_1 = \delta > 0$，则对任意的正整数 n，有

$$\int_E f^+(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_E [f^+]_n(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{E_1} [f^+]_n(x)\mathrm{d}x = n\delta (n = 1,2,\cdots,)$$

所以 $\int_E f^+(x)\mathrm{d}x = +\infty$，这与 $f(x)$ 在 E 上可积矛盾. 因此必须有 $mE_1 = 0$. 同理可证 $mE_2 = 0$.

于是 $mE[|f| = \infty] = m(E_1 \cup E_2) \leqslant mE_1 + mE_2 = 0$.

定理 5.2.2　设 $f(x)$ 在 E 上可测，$g(x)$ 在 E 上非负可积，$|f(x)| \leqslant g(x)$，$x \in E$，则 $f(x)$ 也在 E 上可积，且 $\int_E |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_E g(x)\mathrm{d}x$.

证明　因为 $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$，所以 $f^+(x) \leqslant g(x)$，$f^-(x) \leqslant g(x)$.

对任意的正整数 k,n 有

$$\int_{E_k} [f^+]_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{E_k} [g]_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E g(x)\mathrm{d}x < +\infty,$$

所以对每一个正整数 k，$\{\int_{E_k} [f^+]_n(x)\mathrm{d}x\}(n = 1,2,\cdots)$ 是单调增加有上界的数列，有有限极限

$$\int_{E_k} f^+(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_{E_k} [f^+]_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{E_k} g(x)\mathrm{d}x < +\infty .$$

因而 $\{\int_{E_k} f^+(x)\mathrm{d}x\}(k = 1,2,\cdots)$ 也是单调增加有上界的数列，也有有限极限

$$\begin{aligned}\int_E f^+(x)\mathrm{d}x &= \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f^+(x)\mathrm{d}x \\ &\leqslant \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} g(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_E g(x)\mathrm{d}x < +\infty .\end{aligned}$$

同理可证 $\int_E f^-(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E g(x)\mathrm{d}x < +\infty$. 因此 $f(x)$ 在 E 上可积.

由 $|f(x)|\leqslant g(x),x\in E$，有 $[|f|]_n(x)\leqslant[g]_n(x),n=1,2,\cdots$，所以对每一个正整数 k，有

$$\int_{E_k}[|f|]_n\mathrm{d}x\leqslant\int_{E_k}[g]_n(x)\mathrm{d}x,n=1,2,\cdots.$$

令 $n\to\infty$，有

$$\int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_{E_k}g(x)\mathrm{d}x,k=1,2,\cdots.$$

令 $k\to\infty$，有

$$\int_E|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

定理 5.2.3 设 E 是可测集，则

(1) 当 $E_1,E_2,\cdots,E_m$ 是 E 的互不相交的可测子集，$E=\bigcup_{i=1}^m E_i$，$f(x)$ 在 E 上有积分值时，$f(x)$ 在每一个 E_i 上有积分值，且

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_{E_1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{E_2}f(x)\mathrm{d}x+\cdots+\int_{E_m}f(x)\mathrm{d}x,$$

特别地，当 $f(x)$ 是 E 上的非负可测函数时，

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{E_i}f(x)\mathrm{d}x,i=1,2,\cdots,m;$$

(2) 对任意常数 c，$\int_E cf(x)\mathrm{d}x=c\int_E f(x)\mathrm{d}x$；

(3) 若 $f(x),g(x)$ 都是 E 上的可积函数，则

$$\int_E[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x+\int_E g(x)\mathrm{d}x;$$

(4) 若 $f(x)$ 在 E 上有积分值，且 $f(x)=g(x)a.e.$ 于 E，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E g(x)\mathrm{d}x;$$

(5) 当 $f(x),g(x)$ 都在 E 上可积，且 $f(x)\leqslant g(x)(x\in E)$ 时，

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

证明 证(1). 只须就 $m=2$ 的情形进行证明，一般情形利用归纳法可证. 由定理 5.1.2 的(2)可知，对任意的正整数 k,m 有

$$\int_{E_k}[f^+]_m\mathrm{d}x=\int_{E_k\cap E_1}[f^+]_m\mathrm{d}x+\int_{E_k\cap E_2}[f^+]_m\mathrm{d}x,$$

$$\int_{E_k}[f^-]_m\mathrm{d}x=\int_{E_k\cap E_1}[f^-]_m\mathrm{d}x+\int_{E_k\cap E_2}[f^-]_m\mathrm{d}x,$$

先对 m 后对 k 取极限，有

$$\int_E f^+\,\mathrm{d}x=\int_{E_1}f^+\,\mathrm{d}x+\int_{E_2}f^+\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_E f^-\,\mathrm{d}x=\int_{E_1}f^-\,\mathrm{d}x+\int_{E_2}f^-\,\mathrm{d}x.$$

若 $f(x)$ 在 E 上有积分值，则 $\int_E f^+\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_E f^-\,\mathrm{d}x$ 至少有一个是有限数，不妨设 $\int_E f^+\,\mathrm{d}x$ 是有限数，那么 $\int_{E_1}f^+\,\mathrm{d}x+\int_{E_2}f^+\,\mathrm{d}x$ 是有限数，从而 $\int_{E_1}f^+\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_{E_2}f^+\,\mathrm{d}x$ 都是有限数，因而 $f(x)$ 在 E_1 和 E_2 上都有积分值，且

$$\begin{aligned}\int_E f(x)\mathrm{d}x&=\int_E f^+\,\mathrm{d}x-\int_E f^-\,\mathrm{d}x\\&=\left(\int_{E_1}f^+\,\mathrm{d}x+\int_{E_2}f^+\,\mathrm{d}x\right)-\left(\int_{E_1}f^-\,\mathrm{d}x+\int_{E_2}f^-\,\mathrm{d}x\right)\\&=\int_{E_1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{E_2}f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

当 $f(x)$ 是 E 上的非负可测函数时，由 $E=(E-E_i)\cup E_i$，且 $(E-E_i)\cap E_i=\varnothing$，$i=1,2$. 则

$$\begin{aligned}\int_E f(x)\mathrm{d}x&=\int_{E-E_i}f(x)\mathrm{d}x+\int_{E_i}f(x)\mathrm{d}x\\&\geqslant\int_{E_i}f(x)\mathrm{d}x,\ i=1,2.\end{aligned}$$

为证明(2)和(3)，先证明如下结果：

引理 1　若 $f(x)$，$g(x)$ 是 E 上的非负函数，$c>0$，则对任意的正整数 n 有下式成立：

(i) $[f+g]_n\leqslant[f]_n+[g]_n\leqslant[f+g]_{2n}$；

(ii) $c\,[f]_{[\frac{n}{c}]}\leqslant[cf]_n\leqslant c\,[f]_{[\frac{n}{c}]+1}$，其中 $[\frac{n}{c}]$ 表示不超过 $\frac{n}{c}$ 的最大整数，而 $[f]_n$ 等表示 f 的 n- 截断函数.

证明　(i) 先证 $[f+g]_n \leqslant [f]_n + [g]_n$.

设 $x_0 \in E$，若 $f(x_0) < n$ 且 $g(x_0) < n$，则

$[f(x_0)+g(x_0)]_n \leqslant f(x_0)+g(x_0) = [f(x_0)]_n + [g(x_0)]_n$.

若 $f(x_0)$ 和 $g(x_0)$ 中至少有一个不小于 n，例如 $f(x_0) \geqslant n$，则

$$\begin{aligned}[f(x_0)+g(x_0)]_n &= n \\ &\leqslant n + [g(x_0)]_n \\ &= [f(x_0)]_n + [g(x_0)]_n .\end{aligned}$$

再证 $[f]_n + [g]_n \leqslant [f+g]_{2n}$.

由于 $[f]_n + [g]_n \leqslant f+g, [f]_n + [g]_n \leqslant 2n$，所以

$$\begin{aligned}[f]_n + [g]_n &\leqslant \min\{f+g, 2n\} \\ &= [f+g]_{2n} .\end{aligned}$$

(i) 得证.

(ii) 因为 $[cf]_n = \min\{cf, n\} = c\min\{f, \frac{n}{c}\}$，

而

$$\min\{f, [\frac{n}{c}]\} \leqslant \min\{f, \frac{n}{c}\} \leqslant \min\{f, [\frac{n}{c}]+1\},$$

所以

$$c\min\{f, [\frac{n}{c}]\} \leqslant c\min\{f, \frac{n}{c}\} \leqslant c\min\{f, [\frac{n}{c}]+1\}.$$

于是

$$c[f]_{[\frac{n}{c}]} \leqslant [cf]_n \leqslant c[f]_{[\frac{n}{c}]+1} .$$

(ii)得证.

证(2). 若 $c=0$，则 $cf = 0 (x \in E)$. 对任何正整数 k, m 有

$$\int_{E_k} (cf)\mathrm{d}x = \int_{E_k} 0\mathrm{d}x = 0mE_k = 0,$$

所以

$$\int_E (cf)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} (cf)\mathrm{d}x = 0 = c\int_E f\mathrm{d}x .$$

若 $c > 0$，则 $(cf)^+ = cf^+, (cf)^- = cf^-$，由引理 1 的(ii)，

$$c\left[f^{+}\right]_{\left[\frac{m}{c}\right]} \leqslant \left[cf^{+}\right]_{m} \leqslant c\left[f^{+}\right]_{\left[\frac{m}{c}\right]+1},$$

因此

$$\begin{aligned}\int_{E}(cf)^{+}\,\mathrm{d}x &= \int_{E}(cf^{+})\mathrm{d}x \\ &= \lim_{\substack{m\to\infty\\ k\to\infty}}\int_{E_k}\left[cf^{+}\right]_{m}\mathrm{d}x \\ &\leqslant \lim_{\substack{m\to\infty\\ k\to\infty}}\int_{E_k}c\left[f^{+}\right]_{\left[\frac{m}{c}\right]+1}\mathrm{d}x \\ &= c\int_{E}f^{+}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

另外

$$\begin{aligned}\int_{E}(cf)^{+}\,\mathrm{d}x &= \int_{E}(cf^{+})\mathrm{d}x \\ &= \lim_{\substack{m\to\infty\\ k\to\infty}}\int_{E_k}\left[cf^{+}\right]_{m}\mathrm{d}x \\ &\geqslant \lim_{\substack{m\to\infty\\ k\to\infty}}\int_{E_k}c\left[f^{+}\right]_{\left[\frac{m}{c}\right]}\mathrm{d}x \\ &= c\int_{E}f^{+}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因此，$\int_{E}(cf)^{+}\,\mathrm{d}x = c\int_{E}f^{+}\,\mathrm{d}x$.

同理，$\int_{E}(cf)^{-}\,\mathrm{d}x = c\int_{E}f^{-}\,\mathrm{d}x$.

所以 $\int_{E}(cf)\mathrm{d}x = c\int_{E}f\mathrm{d}x$.

当 $c<0$，可按定理 5.1.2 中(1)的相应情形进行证明.

证(3). 先设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是非负可测函数. 由引理 1 的(i)可知，对任意的正整数 m，有

$$[f+g]_{m} \leqslant [f]_{m}+[g]_{m} \leqslant [f+g]_{2m},$$

所以，对任意的正整数 k 有

$$\int_{E_k}[f+g]_{m}\mathrm{d}x \leqslant \int_{E_k}[f]_{m}\mathrm{d}x+\int_{E_k}[g]_{m}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_{E_k} [f+g]_{2m} \mathrm{d}x,$$

由 f 和 g 是可积的，有

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ k\to\infty}} \left[\int_{E_k} [f]_m \mathrm{d}x + \int_{E_k} [g]_m \mathrm{d}x\right] = \int_E f(x)\mathrm{d}x + \int_E g(x)\mathrm{d}x,$$

所以，

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ k\to\infty}} \int_{E_k} [f+g]_m \mathrm{d}x \leqslant \int_E f(x)\mathrm{d}x + \int_E g(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \lim_{\substack{m\to\infty \\ k\to\infty}} \int_{E_k} [f+g]_{2m} \mathrm{d}x .$$

由左边不等式知 $f+g$ 可积，有

$$\int_E (f+g)\mathrm{d}x \leqslant \int_E f\mathrm{d}x + \int_E g\mathrm{d}x .$$

由右边不等式，有

$$\int_E f\mathrm{d}x + \int_E g\mathrm{d}x \leqslant \int_E (f+g)\mathrm{d}x .$$

因此，

$$\int_E (f+g)\mathrm{d}x = \int_E f\mathrm{d}x + \int_E g\mathrm{d}x .$$

再设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是一般的函数.

由于 $(f+g)^+ \leqslant f^+ + g^+$，$(f+g)^- \leqslant f^- + g^-$，因此，若 f 和 g 都在 E 上可积，则 $f+g$ 也在 E 上可积.

因为 $(f+g)^+ - (f+g)^- = f+g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$，所以

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + (f+g)^-,$$

因而

$$\int_E [(f+g)^+ + f^- + g^-]\mathrm{d}x = \int_E [f^+ + g^+ + (f+g)^-]\mathrm{d}x,$$

由已证结果有

$$\int_E [(f+g)^+ \mathrm{d}x + \int_E f^- \mathrm{d}x + \int_E g^- \mathrm{d}x = \int_E f^+ \mathrm{d}x + \int_E g^+ \mathrm{d}x + \int_E (f+g)^- \mathrm{d}x,$$

所以

$$\int_E [(f+g)^+ \, dx - \int_E (f+g)^- \, dx = (\int_E f^+ \, dx - \int_E f^- \, dx) + (\int_E g^+ \, dx - \int_E g^- \, dx).$$

此即 $\int_E (f+g)dx = \int_E f dx + \int_E g dx$.

证(4). 设 $f(x) = g(x) a.e.$ 于 E, $f(x)$ 在 E 上有积分值, 记 $E_1 = [f(x) = g(x)]$, $E_2 = E[f(x) \neq g(x)]$, 则 $mE_2 = 0$, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, $E = E_1 \cup E_2$.

由(1),

$$\int_E f dx = \int_{E_1} f dx + \int_{E_2} f dx = \int_{E_1} g dx + \int_{E_2} f dx.$$

因为零测度集上的有界函数积分为零(5.1 引理 2), 所以对任何正整数 m, 有 $\int_{E_2} [f^+]_m dx = 0$, $\int_{E_2} [f^-]_m dx = 0$, 因而

$$\int_{E_2} f^+ \, dx = \lim_{m \to \infty} \int_{E_2} [f^+]_m dx = 0,$$

$$\int_{E_2} f^- \, dx = \lim_{m \to \infty} \int_{E_2} [f^-]_m dx = 0.$$

所以, $\int_{E_2} f(x) dx = 0$. 同理, $\int_{E_2} g(x) dx = 0$. 因为 f 在 E 上有积分值, 所以由(1), f 在 $E_1 \subset E$ 上也有积分值, 而在 E_1 上, $f \equiv g$, 因此 g 在 E_1 上有积分值.

对任意的正整数 m, k, 由 $mE_k < \infty$, $[g^+]_m$ 和 $[g^-]_m$ 都是有界函数, 依测度有限集上有界函数的积分定义, 有

$$\int_{E_k} [g^+]_m dx = \int_{E_k \cap E_1} [g^+]_m dx + \int_{E_k \cap E_2} [g^+]_m dx = \int_{E_k \cap E_1} [g^+]_m dx.$$

令 $m \to \infty$, $k \to \infty$, 则

$$\int_E g^+ \, dx = \int_{E_1} g^+ \, dx.$$

同理, $\int_E g^- \, dx = \int_{E_1} g^- \, dx$.

因为 g 在 E_1 上有积分值, 所以 g 在 E 上有积分值. 并且

$$\begin{aligned}\int_E g\,\mathrm{d}x &= \int_E g^+\,\mathrm{d}x - \int_E g^-\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{E_1} g^+\,\mathrm{d}x - \int_{E_1} g^-\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{E_1} g\mathrm{d}x = \int_{E_1} f\mathrm{d}x = \int_{E_1} f\mathrm{d}x + \int_{E_2} f\mathrm{d}x = \int_E f\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

证(5). 设 $F(x) = g(x) - f(x)$，则 $F(x) \geqslant 0 (x \in E)$，并且 $F(x)$ 在 E 上可积，且 $\int_E F(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$，而 $f(x), g(x)$ 都在 E 上可积，并且 $g(x) = F(x) + f(x)$.

由(3)可知，

$$\begin{aligned}\int_E g(x)\mathrm{d}x &= \int_E [F(x) + f(x)]\mathrm{d}x\\ &= \int_E F(x)\mathrm{d}x + \int_E f(x)\mathrm{d}x\\ &\geqslant \int_E f(x)\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

至此定理证毕.

定理 5.2.4(积分的绝对可积性) 设 $f(x)$ 是 E 上的可测函数，则 $f(x)$ 在 E 上可积的充要条件是 $|f(x)|$ 在 E 上可积，并且 $\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

证明 若 $f(x)$ 在 E 上可积，则 $\int_E f^+\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_E f^-\,\mathrm{d}x$ 都是有限数，即 f^+ 和 f^- 都在 E 上可积，而 $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$，由定理 5.2.3 的(3)有

$$\int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_E f^+(x)\mathrm{d}x + \int_E f^-(x)\mathrm{d}x < \infty,$$

因而 $|f(x)|$ 在 E 上可积.

反之，若 $|f(x)|$ 在 E 上可积，则由 $f^+ \leqslant |f|$，$f^- \leqslant |f|$ 及定理 5.2.2，f^+ 和 f^- 都在 E 上可积，所以 f 在 E 上可积.

并且由 $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$，有 $-\int_E |f|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_E f\mathrm{d}x \leqslant \int_E |f|\,\mathrm{d}x$，此即

$$\left|\int_E f\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_E |f|\,\mathrm{d}x\,.$$

定理 5.2.5(积分的绝对连续性) 设 $f(x)$ 在 E 上可积，则对任意的 $\varepsilon > 0$，存

在 $\delta>0$，使得对于 E 的任意子集 A，当 $mA<\delta$ 时，有 $\left|\int_A f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$.

证明　(1) 先证明在 $mE<\infty$，且 $f(x)$ 在 E 上有界的条件下结论成立. 设 $|f(x)|\leqslant K(x\in E)$，则任取可测集 $A\subset E$，

$$\left|\int_A f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_A |f(x)|\mathrm{d}x\leqslant K\cdot mA.$$

对任意的 $\varepsilon>0$，取 $\delta\leqslant\frac{\varepsilon}{K}$，则当 $mA<\delta$ 时，有

$$\left|\int_A f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant K\cdot mA<K\cdot\frac{\varepsilon}{K}=\varepsilon.$$

(2) 一般情形. $f(x)$ 在 E 上可积，则 $|f(x)|$ 也在 E 上可积，由

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}[|f|]_n(x)\mathrm{d}x=\int_E |f(x)|\mathrm{d}x$$

可知，对任意的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使

$$\int_E |f(x)|\mathrm{d}x-\int_{E_N}[|f|]_N(x)\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}.$$

另一方面，由情形(1)，对这个 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $B\subset E_N$，且 $mB<\delta$ 时，有

$$\int_B[|f|]_N(x)\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2},$$

因此，当 $A\subset E$ 且 $mA<\delta$ 时，便有

$$\begin{aligned}\left|\int_A f(x)\mathrm{d}x\right|&\leqslant\int_A |f(x)|\mathrm{d}x\\&=\int_{A-(A\cap E_N)}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{A\cap E_N}|f(x)|\mathrm{d}x\\&=\int_{A-(A\cap E_N)}|f|\mathrm{d}x+\int_{A\cap E_N}(|f|-[|f|]_N)\mathrm{d}x\\&\quad+\int_{A\cap E_N}[|f|]_N\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

因为 $A-(A\cap E_N)=A-E_N\subset E-E_N$，$A\cap E_N\subset E_N$，$m(A\cap E_N)\leqslant mA<\delta$，所以

$$\left|\int_A f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_{E-E_N}|f|\mathrm{d}x+\int_{E_N}(|f|-[|f|]_N)\mathrm{d}x+\int_{A\cap E_N}[|f|]_N\mathrm{d}x$$

$$= \left(\int_E |f| \mathrm{d}x - \int_{E_N} [|f|]_N \mathrm{d}x\right) + \int_{A \cap E_N} [|f|]_N \mathrm{d}x$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

例 5.2.1 设 $f(x)$ 在 $E=[a,b]$ 上可积，则对任何 $\varepsilon>0$，必存在 E 上的连续函数 $\varphi(x)$，使 $\int_a^b |f(x)-\varphi(x)| \mathrm{d}x < \varepsilon$.

证明 设 $e_n = E[|f|>n]$，则 $E[|f|=\infty] = \bigcap_{n=1}^{\infty} e_n$. 因为 $\{e_n\}$ 是单调减少集列，所以 $\lim_{n\to\infty} e_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} e_n$.

而由 $mE = b-a<\infty$ 可知，$me_1<\infty$，因而

$$\lim_{n\to\infty} me_n = m(\lim_{n\to\infty} e_n) = m(\bigcap_{n=1}^{\infty} e_n) = mE[|f|=\infty] = 0 .$$

由积分的绝对连续性可知，对任意的 $\varepsilon>0$，必存在正整数 N，使 $N \cdot me_N < \int_{e_N} |f| \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{4}$.

令 $B_N = E - e_N$，在 B_N 上由 Lusin 定理，存在闭集 $F_N \subset B_N$ 和 $\mathbf{R}$ 上的连续函数 $\varphi(x)$，使得

(1) $m(B_N - F_N) < \frac{\varepsilon}{4N}$;

(2) 当 $x \in F_N$ 时，$f(x) = \varphi(x)$，且 $\sup_{\mathbf{R}} |\varphi(x)| = \sup_{F_N} |f(x)| \leqslant N$.

所以

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f(x)-\varphi(x)| \mathrm{d}x &= \int_{e_N} |f(x)-\varphi(x)| \mathrm{d}x + \int_{B_N} |f(x)-\varphi(x)| \mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_{e_N} |f(x)| \mathrm{d}x + \int_{e_N} |\varphi(x)| \mathrm{d}x + \\
&\quad \int_{B_N-F_N} |f(x)-\varphi(x)| \mathrm{d}x + \int_{F_N} |f(x)-\varphi(x)| \mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{4} + N \cdot me_N + \frac{\varepsilon}{4N} \cdot 2N + 0 \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon .
\end{aligned}$$

5.3　Lebesgue 积分的极限定理

本节讨论如下问题、假设 $\{f_n\}$ 是集 E 上的一个函数序列，按某种意义收敛到 f，如果每个 f_n 在某种意义下都有积分，$f(x)$ 是否有积分？如果 $f(x)$ 也有积分，$\{f_n\}$ 积分的极限是否等于 $f(x)$ 的积分？也就是极限与积分是否可以交换顺序的问题. 我们会看到这个问题在 Lebesgue 积分范围内得到比在 Riemann 积分范围内更为完满的解决，这也正是 Lebesgue 积分的最大成功之处.

定理 5.3.1（Lebesgue 控制收敛定理）　设 $\{f_n(x)\}$ 是 E 上的可测函数列，$F(x)$ 是可积的控制函数，即 $|f_n(x)| \leqslant F(x) a.e.$ 于 $E(n=1,2,\cdots)$，且 $F(x)$ 在 E 上可积，如果 $f_n(x) \xrightarrow{m} f(x)$，则 $f(x)$ 在 E 上是可积的，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x$.

证明　若 $mE=0$，结论显然成立，因此不妨设 $mE>0$.

由于 $f_n \xrightarrow{m} f$，由 F • Riesz 定理可知，存在 $\{f_n(x)\}$ 的子列 $\{f_{n_i}(x)\}$，使 $\lim\limits_{i\to\infty} f_{n_i}(x) = f(x) a.e.$ 于 E.

由 $|f_{n_i}(x)| \leqslant F(x) a.e.$ 于 E 可知 $|f(x)| \leqslant F(x) a.e.$ 于 E. 因为 $F(x)$ 在 E 上可积，所以 $f(x)$ 在 E 上可积.

往证 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x) = \int_E f(x)\mathrm{d}x$.

(1) 设 $mE<\infty$，因为 $F(x)$ 在 E 上可积，由积分的绝对连续性可知，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $e\subset E$ 且 $me<\delta$ 时，有

$$\int_e F(x)\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{4}.$$

又因为 $f_n \xrightarrow{m} f$，所以存在 $N\in \mathbf{N}^+$，使当 $n\geqslant N$ 时，有

$$mE_n = mE\left[|f_n - f| \geqslant \frac{\varepsilon}{2mE}\right] < \delta,$$

所以当 $n\geqslant N$ 时，$\int_{E_n} F(x)\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{4}$，因此

$$\begin{aligned}
\left|\int_E f_n(x)\mathrm{d}x-\int_E f(x)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_E (f_n(x)-f(x))\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \int_E |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x \\
&= \int_{E_n} |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x+\int_{E-E_n} |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x \\
&\leqslant 2\int_{E_n} F(x)\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon}{2mE}\cdot m(E-E_n) \\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon .
\end{aligned}$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)=\int_E f(x)\mathrm{d}x$.

(2) 设 $mE=\infty$，因为 $F(x)$ 在 E 上可积，对任意的 $\varepsilon>0$，取 k,m 充分大，使

$$\int_E F(x)\mathrm{d}x-\int_{E_k}[F]_m(x)\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4},$$

所以

$$\begin{aligned}
\int_{E-E_k} F(x)\mathrm{d}x &= \int_E F(x)\mathrm{d}x-\int_{E_k} F(x)\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_E F(x)\mathrm{d}x-\int_{E_k}[F]_m(x)\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4}.
\end{aligned}$$

另一方面，在 E_k 上可测函数列 $\{|f_n-f|\}$ 满足：$|f_n-f|\leqslant 2F\ a.e.$ 于 $E_k(n=1,2,\cdots)$，$|f_n-f|\xrightarrow{m}0, mE_k<\infty$.

因此，由(1)的结果，存在正整数 N，使当 $n\geqslant N$ 时

$$\int_{E_k}|f_n-f|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}.$$

所以，当 $n\geqslant N$ 时

$$\begin{aligned}
\left|\int_E f_n(x)\mathrm{d}x-\int_E f(x)\mathrm{d}x\right| &\leqslant \int_E |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x \\
&= \int_{E-E_k}|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x+\int_{E_k}|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x \\
&\leqslant 2\int_{E-E_k} F(x)\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon}{2} \\
&< 2\cdot\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon .
\end{aligned}$$

因此，

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

综上，定理得证.

定理 5.3.1′　设 $\{f_n(x)\}$ 是 E 上的可测函数列，$F(x)$ 是可积的控制函数，若 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=f(x)a.e.$ 于 E，则 $f(x)$ 在 E 上可积且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

定理 5.3.1″（勒贝格有界收敛定理）　设 $mE<\infty$，$\{f_n(x)\}$ 是可测集 E 上的可测函数列且测度收敛于 $f(x)$，如果 $\{f_n(x)\}$ 一致有界，即存在常数 M，使得对任意的 $x\in E$ 和对任意的正整数 n，有 $|f_n(x)|\leqslant M$，则 $f(x)$ 在 E 上可积，且有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

定理 5.3.1″对于 Riemann 积分不适用.

例 5.3.1　设 $\{r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots\}$ 是 $[0,1]$ 中的全体有理数. 做如下函数列：

$$f_1(x)=\begin{cases}1, & x=r_1;\\0, & x\in[0,1]-\{r_1\}.\end{cases}$$

$$f_2(x)=\begin{cases}1, & x=r_1,r_2;\\0, & x\in[0,1]-\{r_1,r_2\}.\end{cases}$$

……

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x=r_1,r_2,\cdots,r_n;\\0, & x\in[0,1]-\{r_1,r_2,\cdots,r_n\}.\end{cases}$$

……

那么 $\{f_n(x)\}$ 在$[0,1]$上一致有界，$|f_n(x)|\leqslant 1,x\in[0,1],n=1,2,\cdots$. 而且

$$f_n(x)\to D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为}[0,1]\text{ 上的有理数};\\0, & x\text{ 为}[0,1]\text{ 上的无理数}.\end{cases}$$

因为每个 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上只有有限个不连续点，因而 Riemann 可积，然而 $D(x)$ 在 $[0,1]$ 上不是 Riemann 可积的.

定理 5.3.2(Levi[①] 定理)　设

(1) $\{f_n(x)\}$ 是 E 上非负可测函数列;

(2) $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ $(x \in E, n = 1,2,\cdots)$;

(3) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

则 $\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x$.

证明　先设 $\int_E f(x)\mathrm{d}x < \infty$，对任意的 $\varepsilon > 0$，取正整数 k, m，使

$$\int_{E_k} [f]_m(x)\mathrm{d}x > \int_E f(x)\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2}.$$

此处 $E_k = E \cap K_k, K_k = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid |x_i| \leqslant k, i = 1,2,\cdots,n\}$.

注意到 $mE_k < \infty$，且在 E_k 上 $[f]_m(x) = \lim\limits_{n\to\infty}[f_n]_m(x)$，由 Egoroff 定理可知，存在 $E_\varepsilon \subset E_k$，使 $mE_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{4m}$，且在 $E_k - E_\varepsilon$ 上 $[f_n]_m(x)$ 一致收敛到 $[f]_m(x)$. 因此有正整数 n_0，使 $n \geqslant n_0$ 时，对一切 $x \in E_k - E_\varepsilon$，都有

$$0 \leqslant [f]_m(x) - [f_n]_m(x) < \frac{\varepsilon}{4(1 + mE_k)},$$

则当 $n \geqslant n_0$ 时，

$$\int_E f_n(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{E_k - E_\varepsilon} [f_n]_m(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{E_k - E_\varepsilon} [f]_m(x)\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{4},$$

而

$$\begin{aligned}\int_{E_k} [f]_m(x)\mathrm{d}x &= \int_{E_k - E_\varepsilon} [f]_m(x)\mathrm{d}x + \int_{E_\varepsilon} [f]_m(x)\mathrm{d}x \\ &< \int_{E_k - E_\varepsilon} [f]_m(x)\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{4}.\end{aligned}$$

所以，当 $n \geqslant n_0$ 时，

$$\begin{aligned}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x &\geqslant \int_{E_k - E_\varepsilon} [f]_m(x)\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{4} \\ &> \int_{E_k} [f]_m(x)\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4}\end{aligned}$$

---

① 勒维(Levi, 1875—1961)，意大利数学家.

$$> \int_E f(x)\mathrm{d}x - \varepsilon .$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_E f(x)\mathrm{d}x - \varepsilon$，由 $\varepsilon > 0$ 是任意的，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_E f(x)\mathrm{d}x .$$

另一方面，对任意的 n，显然有 $f_n(x) \leqslant f(x)(x \in E)$，所以

$$\int_E f_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E f(x)\mathrm{d}x,$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E f(x)\mathrm{d}x$.

综上得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x$.

当 $\int_E f(x)\mathrm{d}x = \infty$ 时，由积分定义可知，对任意的 $M > 0$，存在 k,m 使得 $\int_{E_k} [f]_m(x)\mathrm{d}x \geqslant M$，由 $[f_n]_m(x) \to [f]_m(x)(n\to\infty)$ 与 $\int_{E_k} [f]_m(x)\mathrm{d}x < \infty$ 及上面的证明可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_k} [f_n]_m(x)\mathrm{d}x = \int_{E_k} [f]_m(x)\mathrm{d}x \geqslant M .$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x &\geqslant \lim_{n\to\infty}\int_E [f_n]_m(x)\mathrm{d}x \\ &\geqslant \lim_{n\to\infty}\int_{E_k} [f_n]_m(x)\mathrm{d}x \\ &\geqslant M .\end{aligned}$$

由 $M > 0$ 是任意的，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \infty = \int_E f(x)\mathrm{d}x .$$

定理得证.

定理 5.3.3（Lebesgue **基本定理**）　设 $\{f_n(x)\}$ 是可测集 E 上的非负可测函数列，$f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$，则 $\int_E f(x)\mathrm{d}x = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x$.

证明 设 $g_n(x)=\sum_{i=1}^{n}f_i(x)(n=1,2,\cdots)$，则 $\{g_n(x)\}$ 是 E 上非负可测函数列，且 $g_n(x)\leqslant g_{n+1}(x)(x\in E,n=1,2,\cdots)$，$\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=f(x)$.

由 Levi 定理有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E g_n(x)\mathrm{d}x=\int_E\left(\sum_{i=1}^{\infty}f_i(x)\right)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x,$$

而

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_E g_n(x)\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty}\int_E\left(\sum_{i=1}^{n}f_i(x)\right)\mathrm{d}x\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\int_E f_i(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\int_E f_i(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以 $\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x$.

定理 5.3.4（积分对区域的可数可加性） 若 $E_i(i=1,2,\cdots)$ 是 E 的互不相交的可测子集列，$E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$，当 $f(x)$ 在 E 上有积分值时，则 $f(x)$ 在每一个 E_i 上都有积分值，且

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_i}f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 设

$$f_n(x)=\begin{cases}f^+(x), & x\in E_n;\\0, & x\in E-E_n.\end{cases}\quad n=1,2,\cdots,$$

则各 $f_n(x)$ 为 E 上非负可测函数，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=f^+(x).$$

而

$$\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_{E-E_n}f_n(x)\mathrm{d}x+\int_{E_n}f_n(x)\mathrm{d}x=\int_{E_n}f^+(x)\mathrm{d}x,$$

由 Lebesgue 基本定理，有

$$\int_E f^+(x)\mathrm{d}x = \int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f^+(x)\mathrm{d}x.$$

同理可得 $\int_E f^-(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f^-(x)\mathrm{d}x$.

由于 $f(x)$ 在 E 上有积分值，则 $\int_E f^+(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$ 至少有一个不为 $+\infty$，不妨设 $\int_E f^+(x)\mathrm{d}x < +\infty$，于是由

$$\int_{E_i} f^+(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E f^+(x)\mathrm{d}x,$$

可知在每一个 E_i 上 $\int_{E_i} f^+(x)\mathrm{d}x < +\infty$，因而 $f(x)$ 在每一个 E_i 上都有积分值. 并且

$$\begin{aligned}
\int_E f(x)\mathrm{d}x &= \int_E f^+(x)\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f^+(x)\mathrm{d}x - \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f^-(x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{E_n} f^+(x)\mathrm{d}x - \int_{E_n} f^-(x)\mathrm{d}x\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

定理 5.3.5 Fatou[①] 引理　设 $\{f_n(x)\}$ 是 E 上的非负可测函数列，则

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

证明　设

$$g_n(x) = \inf\{f_n(x), f_{n+1}(x), \cdots\}(n = 1,2,\cdots),$$

则 $\{g_n(x)\}$ 是 E 上非负可测函数列，且 $g_n(x) \leqslant g_{n+1}(x), n = 1,2,\cdots$，往证

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x).$$

事实上，

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_n\{\inf_{m\geqslant n}\{f_m(x)\}\}$$

---

① 法都(Fatou,1878—1929)，法国数学家.

$$
\begin{aligned}
&= \sup_n\{\inf\{f_n(x),f_{n+1}(x),\cdots\}\}\\
&= \sup_n g_n(x),\\
\varliminf_{n\to\infty} g_n(x) &= \sup_n\{\inf_{m\geqslant n}\{g_m(x)\}\}\\
&= \sup_n\{\inf\{g_n(x),g_{n+1}(x),\cdots\}\}\\
&= \sup_n g_n(x),
\end{aligned}
$$

所以 $\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \varliminf\limits_{n\to\infty} g_n(x)$.

因为

$$
\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_E \varliminf_{n\to\infty} g_n(x)\mathrm{d}x = \int_E \lim_{n\to\infty} g_n(x)\mathrm{d}x,
$$

由 Levi 定理可知

$$
\begin{aligned}
\int_E \lim_{n\to\infty} g_n(x)\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\int_E g_n(x)\mathrm{d}x\\
&= \varliminf_{n\to\infty}\int_E g_n(x)\mathrm{d}x\\
&\leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x(g_n(x)\leqslant f_n(x)).
\end{aligned}
$$

所以 $\int_E \varliminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x$.

下面的例子说明 Fatou 引理中的不等号是可能出现的.

例 5.3.2　设

$$
f_n(x) = \begin{cases} n, & \dfrac{1}{2n}\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{n};\\ 0, & 0\leqslant x<\dfrac{1}{2n} \text{ 或 } \dfrac{1}{n}<x\leqslant 1. \end{cases} \quad n=1,2,\cdots,
$$

则 $\int_0^1 \varliminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x < \varliminf\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.

证明　当 $x=0$ 时,对每一个 $n\in\mathbf{N}^+$, $f_n(x)=0$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$;

当 $x=1$ 时, $f_1(x)=1, f_n(x)=0(n\geqslant 2)$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$;

当 $0<x<1$ 时,存在 $N\in\mathbf{N}^+$, 使 $\dfrac{1}{N}<x$, 当 $n\geqslant N$ 时, $\dfrac{1}{n}\leqslant\dfrac{1}{N}<x$, 即当 $n\geqslant N$ 时, $f_n(x)=0$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0(x\in[0,1])$, 从而

$\lim\limits_{\overline{n\to\infty}} f_n(x) = 0$，有 $\int_E \lim\limits_{\overline{n\to\infty}} f_n(x)\mathrm{d}x = 0$.

而

$$\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2n}} 0\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} n\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{n}}^{1} 0\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(n = 1,2,\cdots),$$

有

$$\lim_{\overline{n\to\infty}}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2},$$

所以 $\int_0^1 \lim\limits_{\overline{n\to\infty}} f_n(x)\mathrm{d}x < \lim\limits_{\overline{n\to\infty}}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.

例 5.3.3　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x}\cos x\mathrm{d}x = 0$.

证明　设 $f_n(x) = \frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x}\cos x$，则当 $x\in[0,+\infty)$ 时，

$$|e^{-x}\cos x| \leqslant 1, \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(x+n)}{n} = 0,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x}\cos x = 0, x\in[0,+\infty) .$$

因为 $\left(\frac{\ln t}{t}\right)' = \frac{1-\ln t}{t^2} < 0(t\geqslant 3)$，所以当 $t\geqslant 3$ 时 $\frac{\ln t}{t}$ 递减，所以当 $n\geqslant 3$，$x\geqslant 0$ 时，

$$\frac{\ln(x+n)}{n} = \frac{n+x}{n}\frac{\ln(x+n)}{n+x} \leqslant \frac{n+x}{n}\frac{\ln 3}{3} \leqslant \frac{\ln 3}{3}(1+x) .$$

从而 $|f_n(x)| \leqslant \frac{\ln 3}{3}(1+x)e^{-x}$，而 $F(x) = \frac{\ln 3}{3}(1+x)e^{-x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上是 Lebesgue 可积的，由控制收敛定理有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\infty}\lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = 0 ,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x}\cos x\mathrm{d}x = 0$.

例 5.3.4　设 $f(x,t)$ 为矩形 $\{(x,t)\mid a\leqslant x\leqslant b,\alpha\leqslant t\leqslant\beta\}$ 上的二元函数，对每一个 $t\in[\alpha,\beta]$，$f(x,t)$ 是 x 的可积函数. 如果对几乎所有的 x，函数 $f(x,t)$ 对 t

有偏导数，并且存在 $[a,b]$ 上的 Lebesgue 可积函数 $g(x)$，使对 $t\in[\alpha,\beta]$ 及充分小的 $|h|$ 有

$$\left|\frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h}\right|\leqslant g(x)\ a.e.\ \text{于}\ [a,b],$$

则 $\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有导函数，且 $\frac{d}{\mathrm{d}t}\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\mathrm{d}x$.

证明 任取 $t\in[\alpha,\beta]$，并任取 $[\alpha,\beta]$ 中一点列 $\{h_n\}$，使当 $n\to\infty$ 时，$h_n\to 0(h_n\neq 0)$，且 $t+h_n\in[\alpha,\beta]$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x,t+h_n)-f(x,t)}{h_n}=\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\ a.e.\ \text{于}\ [a,b].$$

由 Lebesgue 控制收敛定理可知

$$\begin{aligned}\frac{d}{\mathrm{d}t}\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_a^b f(x,t+h_n)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x}{h_n}\\&=\lim_{n\to\infty}\int_a^b\frac{f(x,t+h_n)-f(x,t)}{h_n}\mathrm{d}x\\&=\int_a^b\lim_{n\to\infty}\frac{f(x,t+h_n)-f(x,t)}{h_n}\mathrm{d}x\\&=\int_a^b\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

例 5.3.5 用 Fatou 引理证明 Levi 定理.

Levi 定理：$\{f_n(x)\}$ 是 E 上非负可测函数列，且当 $x\in E$ 时，

$$f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)(n=1,2,\cdots),$$
$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),$$

则 $\int_E f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x$.

证明 由 $0\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots$，并且 $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ 可知 $\underline{\lim}_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$，由 Fatou 引理有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E\underline{\lim}_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x\leqslant\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x .$$

因为对每一个 $x\in E$，$\{f_n(x)\}$ 是单调增加数列，因而 $\{\int_E f_n(x)\mathrm{d}x\}$ 也是单调

增加数列，极限存在，并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x .$$

因此

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x \leqslant \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x .$$

另一方面，由定理条件显然有 $0 \leqslant f_n(x) \leqslant f(x)(x \in E, n = 1,2,\cdots)$，因此

$$\int_E f_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E f(x)\mathrm{d}x(n = 1,2,\cdots) .$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E f(x)\mathrm{d}x$.

于是 $\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x$.

5.4　Lebesgue 积分与 Riemann 积分的关系

定理 5.4.1　如果有界函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上是 Riemann 可积的，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上也是 Lebesgue 可积的，且

$$\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x$ 表示 f 在 $[a,b]$ 上的 Lebesgue 积分，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示 f 在 $[a,b]$ 上的 Riemann 积分.

证明　因为 $f(x)$ 是测度有限集 $E = [a,b]$ 上的有界函数，所以只须证明 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数.

由于 $f(x)$ Riemann 可积，取 $[a,b]$ 的一列分点组 $\{D_m\}$，其中 $D_m: a = x_0^{(m)} < x_1^{(m)} < \cdots < x_{i_m}^{(m)} = b, D_m \subset D_{m+1}$（即 D_{m+1} 是 D_m 的加细），$\delta(D_m) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant i_m}\{x_i^{(m)} - x_{i-1}^{(m)}\} \to 0(m\to\infty)$，设 $m_i^{(m)}, M_i^{(m)}$ 分别是 f 在 $[x_{i-1}^{(m)}, x_i^{(m)}]$ 上的下确界与上确界，由 Riemann 积分的定义有

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{i_m} m_i^{(m)}(x_i^{(m)} - x_{i-1}^{(m)}) = \lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{i_m} M_i^{(m)}(x_i^{(m)} - x_{i-1}^{(m)}) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x .$$

令 $\{\varphi_m\}$,$\{\psi_m\}$ 为如下的函数列：

$$\varphi_m(x)=\begin{cases} m_i^{(m)}, & x\in(x_{i-1}^{(m)},x_i^{(m)}]; \\ f(a), & x=a. \end{cases}$$

$$\psi_m(x)=\begin{cases} M_i^{(m)}, & x\in(x_{i-1}^{(m)},x_i^{(m)}]; \\ f(a), & x=a. \end{cases}$$

则 $\{\varphi_m\}$ 和 $\{\psi_m\}$ 是 $[a,b]$ 上的简单函数列.

由于 $D_m\subset D_{m+1}$，故当区间长度缩小时，上确界不增，下确界不减，所以

$$\psi_1\geqslant\psi_2\geqslant\cdots\geqslant\psi_m\geqslant\cdots\geqslant f,$$
$$\varphi_1\leqslant\varphi_2\leqslant\cdots\leqslant\varphi_m\leqslant\cdots\leqslant f.$$

令 $\lim\limits_{m\to\infty}\psi_m=\overline{f}$，$\lim\limits_{m\to\infty}\varphi_m=\underline{f}$. 那么 $\overline{f}$，$\underline{f}$ 都是 $[a,b]$ 上的有界可测函数，且 $\underline{f}\leqslant f\leqslant\overline{f}$. 所以 $\overline{f}-\underline{f}$ 是非负 Lebesgue 可积函数，从而

$$\int_{[a,b]}(\overline{f}-\underline{f})\mathrm{d}x=\int_{[a,b]}\overline{f}\mathrm{d}x-\int_{[a,b]}\underline{f}\mathrm{d}x\geqslant 0,$$

即

$$\int_{[a,b]}\overline{f}\mathrm{d}x\geqslant\int_{[a,b]}\underline{f}\mathrm{d}x,$$

而

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]}\underline{f}(x)\mathrm{d}x&\geqslant\int_{[a,b]}\varphi_m(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{i=1}^{i_m}m_i^{(m)}(x_i^{(m)}-x_{i-1}^{(m)})\to\int_a^b f(x)\mathrm{d}x(m\to\infty),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]}\overline{f}(x)\mathrm{d}x&\leqslant\int_{[a,b]}\psi_m(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{i=1}^{i_m}M_i^{(m)}(x_i^{(m)}-x_{i-1}^{(m)})\to\int_a^b f(x)\mathrm{d}x(m\to\infty).\end{aligned}$$

这说明

$$\int_{[a,b]}\overline{f}(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_{[a,b]}\underline{f}(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_{[a,b]}\underline{f}(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{[a,b]}\overline{f}(x)\mathrm{d}x,$$

所以

$$\int_{[a,b]}\overline{f}(x)\mathrm{d}x=\int_{[a,b]}\underline{f}(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_{[a,b]}(\overline{f}(x)-\underline{f}(x))\mathrm{d}x=0.$$

由定理 5.1.3 可知 $\overline{f}=\underline{f}\ a.e.$ 于 $[a,b]$，进而 $f=\overline{f}=\underline{f}\ a.e.$ 于 $[a,b]$.

因此 f 在 $[a,b]$ 上可测，从而 f 在 $[a,b]$ 上可积. 并且

$$\int_{[a,b]}f\mathrm{d}x=\int_{[a,b]}\overline{f}\mathrm{d}x=\int_{[a,b]}\underline{f}\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

定理 5.4.2　有界函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积的充要条件是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处连续.

证明　取 $[a,b]$ 的单调分点组列 $\{D_n\}:D_n\subset D_{n+1}$，其中 $D_n:a=x_0^{(n)}<x_1^{(n)}<\cdots<x_{i_n}^{(n)}=b$，$\delta(D_n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant i_n}\{x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)}\}\to0(n\to\infty)$，用 $m_i^{(n)},M_i^{(n)}$ 分别表示 f 在 $[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}]$ 中的下确界与上确界. 构造两个函数列 $\{\varphi_n\},\{\psi_n\}$：

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}m_i^{(n)}, & x\in(x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}];\\ f(a), & x=a.\end{cases}$$

$$\psi_n(x)=\begin{cases}M_i^{(n)}, & x\in(x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}];\\ f(a), & x=a.\end{cases}$$

由于 $D_n\subset D_{n+1}$，当区间缩小时，上确界不增，下确界不减，所以

$$\psi_1\geqslant\psi_2\geqslant\cdots\geqslant\psi_n\geqslant\cdots\geqslant f,$$

$$\varphi_1\leqslant\varphi_2\leqslant\cdots\leqslant\varphi_n\leqslant\cdots\leqslant f.$$

令 $\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n=\overline{f},\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n=\underline{f}$，并且 $\underline{f}\leqslant f\leqslant\overline{f}$.

必要性. 设 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，从定理 5.4.1 的证明过程得到 $\overline{f}=\underline{f}\ a.e.$ 于 $[a,b]$，$f=\overline{f}=\underline{f}\ a.e.$ 于 $[a,b]$.

记 $E_1=\{x\mid\underline{f}\neq f$ 或 $\overline{f}\neq f,x\in[a,b]\}$，则 $mE_1=0$，E_2 是分点组列 $\{D_n\}$ 中所有分点的全体，则 E_2 是可列集，所以 $mE_2=0$. 因此 $E_0=E_1\cup E_2$ 是零测度集. 往证当 $x_0\bar{\in}E_0$ 时，$f(x)$ 在 x_0 连续.

事实上，对任意的 $\varepsilon>0$，由 $x_0\bar{\in}E_0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(x_0)=f(x_0)$，于

是存在正整数 N，使 $f(x_0)-\varepsilon<\varphi_N(x_0)\leqslant f(x_0)\leqslant\psi_N(x_0)<f(x_0)+\varepsilon$.

因为 $x_0\bar{\in}E_1\cup D_N$，所以存在开区间 $I_N=(x_i^{(N)},x_{i+1}^{(N)})$，使 $x_0\in I_N$，这时取 $\delta=\min\{x_{i+1}^{(N)}-x_0,x_0-x_i^{(N)}\}$. 对任何 $x'\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$，有

$$f(x_0)-\varepsilon<\varphi_N(x_0)=\varphi_N(x')\leqslant f(x')\leqslant\psi_N(x')=\psi_N(x_0)<f(x_0)+\varepsilon,$$

因此

$$|f(x')-f(x_0)|<\varepsilon,$$

即 x_0 是 $f(x)$ 的连续点. 从而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处连续.

充分性. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界且几乎处处连续. 记 f 的连续点全体为 E_3，$mE_3=b-a$. 当 $x_0\in E_3$ 时，对任意的 $\varepsilon>0$，必存在 $\delta>0$，使得 $x'\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$时，有

$$f(x_0)-\varepsilon<f(x')<f(x_0)+\varepsilon,$$

因此，如果取一列分点组 $\{D_n\}:D_n\subset D_{n+1},\delta(D_n)\to0(n\to\infty)$，只要 $\delta(D_n)<\delta$ 时，相应于这个分点组，所作的相应的函数 φ_n,ψ_n，便有

$$f(x_0)\geqslant\varphi_n(x_0)\geqslant f(x_0)-\varepsilon,$$

$$f(x_0)\leqslant\psi_n(x_0)\leqslant f(x_0)+\varepsilon .$$

所以，

$$\overline{f}(x_0)=\lim_{n\to\infty}\psi_n(x_0)=f(x_0),$$

$$\underline{f}(x_0)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x_0)=f(x_0) .$$

即对任何 $x_0\in E_3,\overline{f}(x_0)=f(x_0)=\underline{f}(x_0)$，也就是 $\overline{f}=\underline{f}\,a.e.$ 于 E .

由于 f 是有界的，所以存在常数 M，使得 $|f|\leqslant M$. 因而 $|\varphi_n|\leqslant M$，$|\psi_n|\leqslant M$. 注意到 $\varphi_n\to\underline{f}(n\to\infty),\psi_n\to\overline{f}(n\to\infty)$. 由 Lebesgue 有界收敛定理知

$$\overline{S}(D_n)=(R)\int_a^b\psi_n\mathrm{d}x=(L)\int_{[a,b]}\psi_n\mathrm{d}x\to(L)\int_{[a,b]}\overline{f}\mathrm{d}x\ ;$$

$$\underline{S}(D_n)=(R)\int_a^b\varphi_n\mathrm{d}x=(L)\int_{[a,b]}\varphi_n\mathrm{d}x\to(L)\int_{[a,b]}\underline{f}\mathrm{d}x .$$

因为 $\overline{f}=\underline{f}\,a.e.$ 于 E，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(\overline{S}(D_n)-\underline{S}(D_n))=0$. 因而，f 是 Riemann 可积的.

定理 5.4.1 告诉我们，若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，则必 Lebesgue 可积，且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x \ .$$

这说明 Lebesgue 积分的确是 Riemann 积分的延拓，但应该注意定理 5.4.1 对于广义(Riemann)积分并不成立.

例 5.4.1　设 $f(x)$ 定义在 $(0,1)$ 上，且在 $\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)$ 上，$f(x)=(-1)^n n$ $(n=1,2,\cdots)$，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上广义 Riemann 可积，但 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 却不是 Lebesgue 可积的.

证明　从广义 Riemann 积分而言，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上的可积性相当于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ 的收敛性. 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ 是收敛的，所以 f 在 $(0,1)$ 上广义 Riemann 可积.

然而对于 Lebesgue 积分来说，我们考虑 $|f|$，对于非负可测函数 $|f|$，由于

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^1 [\,|f|\,]_n \mathrm{d}x &\geqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} [\,|f|\,]_k \mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1} \\ &= \infty \ .\end{aligned}$$

所以 $|f|$ 不是 Lebesgue 可积的，由 Lebesgue 积分的绝对可积性可知，f 也不是 Lebesgue 可积的.

这个现象的原因在于 Lebesgue 可积函数具有绝对可积性，所以 Lebesgue 积分是一种绝对收敛积分，没有条件收敛的概念，而 Riemann 积分则不然，Riemann 广义积分不必为绝对收敛的. 因此 Lebesgue 积分虽是 Riemann 积分的推广，却非 Riemann 广义积分的推广.

尽管如此，我们有下面的结果：

定理 5.4.3　$[a,b]$ 上广义 Riemann 可积(简称 R 可积)函数 $f(x)$ Lebesgue 可积(简称 L 可积)的充要条件是 $|f(x)|$ 广义 R 可积，且此时两个积分的值相等.

证明 不失一般性，我们设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上仅在 $x=b$ 的邻域中无界.

必要性. 设 $f(x)L$ 可积，则当 $a\leqslant\eta<b$ 时，$f(x)$ 在 $[a,\eta]$ 上有界 R 可积，从而 L 可积，由 L 积分的绝对可积性可知，$|f(x)|$ 在 $[a,\eta]$ 上 L 可积，且

$$(R)\int_a^\eta |f(x)|\,\mathrm{d}x = (L)\int_{[a,\eta]} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant (L)\int_{[a,b]} |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty .$$

所以 $\lim\limits_{\eta\to b}(R)\int_a^\eta |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 存在，因而 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上广义 R 可积.

充分性. 设 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上广义 R 可积，往证 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 L 可积. 选取点列 $\{\eta_n\}$，使 $a\leqslant\eta_n<b$，且 $\eta_1<\eta_2<\cdots$，$\eta_n\to b(n\to\infty)$.

作函数

$$f_n(x)=\begin{cases} f(x), & a\leqslant x\leqslant \eta_n; \\ 0, & \eta_n<x\leqslant b, \end{cases}$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x), x\in[a,b]$，并且 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界 R 可积，从而由定理 5.4.1 可知，$f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上 L 可积，因而 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上 L 可积，由 $|f(x)|$ 广义 R 可积，可设

$$(R)\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = A < +\infty,$$

$$(L)\int_{[a,b]} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = (R)\int_a^{\eta_n} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant A.$$

因为 $\{|f_n|\}$ 是 $[a,b]$ 上的单调增加函数列，$\lim\limits_{n\to\infty}|f_n(x)|=|f(x)|$. 由 Levi 定理可知

$$(L)\int_{[a,b]} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}(L)\int_{[a,b]} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant A,$$

即 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上 L 可积，亦即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 L 可积. 下面证明

$$(L)\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = (R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x .$$

事实上，因为 $|f_n(x)|\leqslant|f(x)|, n=1,2,\cdots$，由 Lebesgue 控制收敛定理得到

$$(L)\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}(L)\int_{[a,b]} f_n(x)\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{n\to\infty}(R)\int_a^{\eta_n} f(x)\mathrm{d}x$$
$$= (R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x .$$

需要指出的是，对于无穷限的广义 R 积分也有同样的结论. 其证明也完全相似，仅需取 $\eta_n \to \infty(n\to\infty)$ 代替 $\eta_n \to b(n\to\infty)$.

例 5.4.2　设 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}, x\in(0,\infty)$，则 $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上广义 R 可积，在 $(0,\infty)$ 上却不是广义 L 可积的.

证明　由狄利克雷判别法知 $(R)\int_0^{\infty}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛，即 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $(0,\infty)$ 上广义 R 可积.

因为 $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \geqslant \dfrac{\sin^2 x}{x} = \dfrac{1}{2x}-\dfrac{\cos 2x}{2x}$，由 $(R)\int_0^{\infty}\dfrac{1}{2x}\mathrm{d}x$ 发散、$(R)\int_0^{\infty}\dfrac{\cos 2x}{2x}\mathrm{d}x$ 收敛知 $\int_0^{\infty}\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$ 发散. 因此由定理 5.4.3 的说明知 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $(0,\infty)$ 上不是广义 L 可积的.

例 5.4.3　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(R)\int_0^1 \dfrac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx\,\mathrm{d}x$.

解　设 $f_n(x)=\dfrac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx, x\in[0,1]$，则 $\{f_n(x)\}$ 是 $[0,1]$ 上连续函数列，所以 $(R)\int_0^1 \dfrac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx\,\mathrm{d}x$ 存在且与 $\int_{[0,1]}\dfrac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx\,\mathrm{d}x$ 的值相等. 又因为

$$\left|\frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx\right| \leqslant \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2} = \frac{nx}{1+n^2x^2}x^{-\frac{1}{2}} \leqslant \frac{nx}{2nx}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},$$

而 $\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ 在 $[0,1]$ 上可积，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx = 0, x\in[0,1]$,

由 Lebesgue 控制收敛定理得：

$$\lim_{n\to\infty}(R)\int_0^1 \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}\frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{[0,1]} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2} \sin^5 nx \right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_{[0,1]} 0 \mathrm{d}x = 0\,.$$

5.5 Fubini 定理

在 Riemann 积分理论中，我们讨论过重积分与累次积分的关系，如果 I 是矩形 $\{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$，$f(x,y)$ 在 I 上连续，则

$$\iint_I f(x,y)\mathrm{d}x dy = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\,.$$

本节讨论的主要问题是要对 Lebesgue 积分建立相应的定理，即 Fubini 定理. 我们会发现在交换积分顺序这个问题上，Lebesgue 积分要求的条件要比 Riemann 积分的要求少，这是 Lebesgue 积分的方便之处.

定义 5.5.1 设 $A \subset \mathbf{R}^p$，$B \subset \mathbf{R}^q$ 是两个非空点集，则 $\mathbf{R}^{p+q}$ 中的点集 $\{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$ 称为 A 与 B 的笛卡尔乘积，记作 $A \times B$.

$\mathbf{R}^2$ 中的矩形 $I = \{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$ 就是 $[a,b] \times [c,d]$.

定义 5.5.2 设 $E \subset \mathbf{R}^{p+q}$，$x_0 \in \mathbf{R}^p$ 是一固定点，则称 $\mathbf{R}^q$ 中的点集 $E_{x_0} = \{y \mid y \in \mathbf{R}^q, (x_0, y) \in E\}$ 为 E 在 x_0 处的截口.

定理 5.5.1 若 E 是 $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q = \mathbf{R}^{p+q}$ 中的可测集合，设 $m(x) = mE_x$，则 $m(x)$ 是 $\mathbf{R}^p$ 上几乎处处有定义的可测函数，并且 $mE = \int_{\mathbf{R}^p} m(x)\mathrm{d}x$.

证明 (1) E 是有界可测集.

(i) E 为左开右闭的区间.

设 $E = \Delta \times \Delta_1$，其中 Δ, Δ_1 分别是 $\mathbf{R}^p$ 和 $\mathbf{R}^q$ 中左开右闭的区间，则

$$E_x = \begin{cases} \Delta_1, & x \in \Delta; \\ \varnothing, & x \bar{\in} \Delta. \end{cases}$$

这样对所有的 $x \in \mathbf{R}^p$，E_x 是 $\mathbf{R}^q$ 中的可测集，且

$$mE_x = \begin{cases} |\Delta_1|, & x \in \Delta; \\ 0, & x \bar{\in} \Delta, \end{cases}$$

所以 mE_x 为 $\mathbf{R}^p$ 上的简单函数,因而可测,且

$$mE = |\Delta \times \Delta_1| = |\Delta| \cdot |\Delta_1| = \int_{\Delta} mE_x \mathrm{d}x + \int_{\mathbf{R}^p - \Delta} mE_x \mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^p} mE_x \mathrm{d}x .$$

(ii) E 为开集.

设 $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_i$,其中 $\{I_i\}$ 是互不相交的左开右闭的区间列. 则 $E_x = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (I_i)_x$. 由(i)可知对所有的 $x \in \mathbf{R}^p$,各 $(I_i)_x$ 是 $\mathbf{R}^q$ 中的可测集,所以 E_x 也是 $\mathbf{R}^q$ 中的可测集. 又因为各 $(I_i)_x$ 互不相交,所以

$$mE_x = \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i)_x .$$

由(i)可知各 $m(I_i)_x$ 都是 $\mathbf{R}^p$ 上的可测函数,所以 mE_x 也是 $\mathbf{R}^p$ 上的可测函数,且

$$mE = \sum_{i=1}^{\infty} mI_i = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathbf{R}^p} m(I_i)_x \mathrm{d}x.$$

由 Lebesgue 逐项积分定理,有

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathbf{R}^p} m(I_i)_x \mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^p} \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i)_x \mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^p} mE_x \mathrm{d}x .$$

所以

$$mE = \int_{\mathbf{R}^p} mE_x \mathrm{d}x .$$

(iii) E 为 G_δ 型集.

设 $E = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} G_i$,其中各 G_i 是 $\mathbf{R}^{p+q}$ 中的开集,令 $G_n^* = \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$,则 G_n^* 仍是开集,$E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n^*$,且 $G_1^* \supset G_2^* \supset \cdots \supset G_n^* \cdots$,则 $E_x = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (G_n^*)_x$,由(ii)可知对所有的 $x \in \mathbf{R}^p$,各 $(G_n^*)_x$ 都是 $\mathbf{R}^q$ 中的可测集,所以 E_x 也是 $\mathbf{R}^q$ 中的可测集. 又因为 $m(G_1^*)_x < \infty$(E 是有界集),且 $(G_1^*)_x \supset (G_2^*)_x \supset \cdots$,所以 $mE_x = \lim\limits_{n\to\infty} m(G_n^*)_x$.

由(ii)可知,各 $m(G_n^*)_x$ 都是 $\mathbf{R}^p$ 上的可测函数,所以 mE_x 也是 $\mathbf{R}^p$ 上的可测函数. 且

$$mE = \lim_{n\to\infty} mG_n^* = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}^p} m(G_n^*)_x \mathrm{d}x .$$

设 $f_n(x) = m(G_1^*)_x - m(G_n^*)_x$,则 $\{f_n(x)\}$ 是 $\mathbf{R}^p$ 上的非负可测函数列,

$$f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x), n = 1,2,\cdots,$$

且

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = m(G_1^*)_x - mE_x .$$

由 Levi 定理有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^p} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^p} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^p} m(G_n^*)_x\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^p} mE_x\mathrm{d}x,$$

所以

$$mE = \int_{\mathbf{R}^p} mE_x\mathrm{d}x .$$

(iv) E 是 $\mathbf{R}^{p+q}$ 中的零测度集. 则有 $\mathbf{R}^{p+q}$ 中 G_δ 型集 $G \supset E$, 使 $m(G-E)=0$, 由 $mE=0$ 知 $mG = m(G-E)+mE=0$, 由(iii)可知 $0 = mG = \int_{\mathbf{R}^p} mG_x\mathrm{d}x$, 所以 $mG_x = 0$ $a.e.$ 于 $\mathbf{R}^p$. 于是由 $E_x \subset G_x$, 就有 $mE_x = 0$ $a.e.$ 于 $\mathbf{R}^p$. 因此

$$mE = \int_{\mathbf{R}^p} mE_x\mathrm{d}x .$$

(v) E 是一般有界可测集.

设 $E \subset \mathbf{R}^{p+q}$ 是有界可测集,则存在 G_δ 型集 G, 使 $G \supset E$, 且 $m(G-E)=0$. 则 $E = G-(G-E)$, G 是 G_δ 型集, $G-E$ 是零测度集.

由于 $E_x = G_x - (G-E)_x$, 依(iii)和(iv)可知 E_x 是 $\mathbf{R}^q$ 中的可测集 $a.e.$ 于 $\mathbf{R}^p$. 又因为

$$\begin{aligned} mE_x &= mG_x - m(G-E)_x \\ &= mG_x\, a.e. \text{ 于 } \mathbf{R}^p . \end{aligned}$$

由(iii)可知 mE_x 是 $\mathbf{R}^p$ 上几乎处处有定义的可测函数,并且

$$mE = mG = \int_{\mathbf{R}^p} mG_x\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^p} mE_x\mathrm{d}x .$$

(2) E 是无界可测集

设 $E_m = E \cap K_m$, 其中 $K_m = \{x_1, x_2, \cdots, x_{p+q} \mid |x_i| \leqslant M, i = 1,2,\cdots,p+q\}$. 则 E_m 是 E 的有界可测子集. $E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$, $E_m \subset E_{m+1}$ $(m \geqslant 1)$.

因此 $E_x = \bigcup_{m=1}^{\infty} (E_m)_x, (E_m)_x \subset (E_{m+1})_x (m \geqslant 1)$.

从而对于 $\mathbf{R}^p$ 中使 $(E_m)_x$ 都可测的 x 有

$$mE_x = \lim_{m\to\infty} m (E_m)_x .$$

由(1)可知 $m(E_m)_x$ 是 $\mathbf{R}^p$ 上几乎处处有定义的可测函数,并且 $\int_{\mathbf{R}^p} m(E_m)_x \mathrm{d}x = mE_m$, 因此 mE_x 也是 $\mathbf{R}^p$ 上几乎处处有定义的可测函数,并且

$$\int_{\mathbf{R}^p} mE_x \mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^p} \lim_{m\to\infty} m(E_m)_x \mathrm{d}x .$$

由 Levi 定理有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^p} \lim_{m\to\infty} m(E_m)_x \mathrm{d}x &= \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbf{R}^p} m(E_m)_x \mathrm{d}x \\ &= \lim_{m\to\infty} mE_m \\ &= mE .\end{aligned}$$

从而

$$mE = \int_{\mathbf{R}^p} mE_x \mathrm{d}x .$$

定理得证.

定理 5.5.2 设 A, B 分别是 $\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^q$ 中的可测集,则 $A\times B$ 是 $\mathbf{R}^{p+q}$ 中的可测集,且 $m(A\times B) = mA \cdot mB$. 此处当 mA, mB 中有一个为零时,不论另一个是否有限,$mA \cdot mB$ 都理解为零.

证明 (1) A, B 都是有界可测集.

A, B 是有界可测集,则存在 $\mathbf{R}^p$ 中的有限区间 I 和 $\mathbf{R}^q$ 中的有限区间 I^* 使 $A\subset I, B\subset I^*$.

因为 $A\subset \mathbf{R}^p, B\subset \mathbf{R}^q$ 是可测集,对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\mathbf{R}^p$ 中的开集 G 及闭集 F 和 $\mathbf{R}^q$ 中的开集 G^* 及闭集 F^*, 使

$$F\subset A\subset G\subset I, F^* \subset B\subset G^* \subset I^* ,$$

且

$$m(G-F) < \frac{\varepsilon}{2|I^*|}, m(G^* - F^*) < \frac{\varepsilon}{2|I|},$$

因此分别存在 $\mathbf{R}^p$ 和 $\mathbf{R}^q$ 中的开区间列 $\{I_i\}$ 及 $\{I_i^*\}$, 使

$$G-F\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i,G^*-F^*\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i^*,$$

且

$$\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|<\frac{\varepsilon}{2|I^*|},\sum_{i=1}^{\infty}|I_i^*|<\frac{\varepsilon}{2|I|}.$$

不难证明 $G\times G^*$ 与 $F\times F^*$ 分别是 $\mathbf{R}^{p+q}$ 中的开集与闭集，且

$$\begin{aligned}G\times G^*-F\times F^*&=G\times(G^*-F^*)\cup(G-F)\times F^*\\&\subset I\times(G^*-F^*)\cup(G-F)\times I^*\\&\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}(I\times I_i^*)\cup\bigcup_{i=1}^{\infty}(I_i\times I^*),\end{aligned}$$

以及

$$\sum_{i=1}^{\infty}|I\times I_i^*|+\sum_{i=1}^{\infty}|I_i\times I^*|=|I|\sum_{i=1}^{\infty}|I_i^*|+|I^*|\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|<\varepsilon.$$

由此 $m(G\times G^*-F\times F^*)<\varepsilon$.

这证明了对任意的 $\varepsilon>0$，有 $\mathbf{R}^{p+q}$ 中的开集 $G\times G^*$、闭集 $F\times F^*$，使

$$F\times F^*\subset A\times B\subset G\times G^*,$$

且 $m(G\times G^*-F\times F^*)<\varepsilon$，因此 $A\times B$ 是 $\mathbf{R}^{p+q}$ 中的可测集.

因为 $A\times B$ 是可测的，由定理 5.5.1 可知，对于 $x\in\mathbf{R}^p$ 有

$$(A\times B)_x=\begin{cases}B, & x\in A;\\ \varnothing, & x\bar{\in}A.\end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}m(A\times B)&=\int_{\mathbf{R}^p}m\,(A\times B)_x\,\mathrm{d}x\\&=\int_A mB\,\mathrm{d}x\\&=mA\cdot mB.\end{aligned}$$

(2) A,B 中至少有一个是无界可测集.

此时 A,B 可以表示成一些互不相交的有界可测集的并 $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i,B=\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j$.

例如，若 A 是无界集，令 $E_i=(S_i-S_{i-1})\cap A$，其中 S_i 是 $\mathbf{R}^n$ 中左闭右开的球，此时 $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$，各 E_i 互不相交. 于是

$$A \times B = (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \times (\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} (A_i \times B_j).$$

由(1)知 $A_i \times B_j$ 可测，$m(A_i \times B_j) = mA_i \times mB_j$，所以 $A \times B$ 是可测的，并且

$$\begin{aligned} m(A \times B) &= m(\bigcup_{i,j=1}^{\infty} A_i \times B_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^{\infty} mA_i \cdot mB_j \\ &= (\sum_{i=1}^{\infty} mA_i) \times (\sum_{j=1}^{\infty} mB_j) \\ &= mA \cdot mB. \end{aligned}$$

定理得证.

定义 5.5.3　设 $f(x)$ 是 $E \subset \mathbf{R}^n$ 上的非负函数，则 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的点集 $\{(x,z) \mid x \in E, 0 \leqslant z < f(x)\}$，称为 $f(x)$ 在 E 上的下方图形，记为 $G(E,f)$.

定理 5.5.3　(非负可测函数积分的几何意义)　设 $f(x)$ 为可测集 $E \subset \mathbf{R}^n$ 上的非负可测函数，则

(1) $f(x)$ 是 E 上可测函数的充要条件是 $G(E,f)$ 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的可测集；

(2) 当 $f(x)$ 在 E 上可测时，$\int_E f(x)\mathrm{d}x = mG(E,f)$.

证明　设 $f(x) = c$ (常数)，$c \geqslant 0$，则

$$G(E,f) = \begin{cases} E \times [0,c), & c > 0; \\ \varnothing, & c = 0. \end{cases}$$

所以由定理 5.5.2，$G(E,f)$ 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的可测集.

设 $f(x)$ 是 E 上的简单函数，这时 $E = \bigcup_{i=1}^{m} E_i$，各 E_i 是 E 的互不相交的可测子集，在 E_i 上 $f(x) = c_i (i = 1,2,\cdots,m)$. 总有 $G(E,f) = \bigcup_{i=1}^{m} G(E_i,f)$，所以 $G(E,f)$ 是可测集.

设 $f(x)$ 是非负可测函数，那么存在简单函数列 $\{\varphi_n(x)\}$，$0 \leqslant \varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x) \leqslant \cdots$，使 $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x), x \in E$.

不难证明，$G(E,\varphi_1) \subset G(E,\varphi_2) \subset \cdots$，且 $\bigcup_{n=1}^{\infty} G(E,\varphi_n) = G(E,f)$.

已知各 $G(E,\varphi_n)$ 是可测集，所以 $G(E,f)$ 是可测集.

反之，如果 $G(E,f)$ 是可测集，由定理 5.5.1 可知 $mG(E,f)_x$ 是在 $\mathbf{R}^n$ 中几乎处处有定义的可测函数，且

$$mG(E,f)_x=\begin{cases}f(x), & x\in E;\\ 0, & x\bar{\in} E.\end{cases}$$

所以 $f(x)$ 在 E 上可测，且

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=mG(E,f).$$

推论 1 设 $f(x)$ 为 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的可积函数，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=mG(E,f^+)-mG(E,f^-).$$

推论 2 可测函数 $f(x)$ 在 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上可积的充要条件是 $mG(E,f^+)$ 与 $mG(E,f^-)$ 都是有限的.

定理 5.5.4（Fubini[①] 定理）（1）设 $f(p)=f(x,y)$ 在 $A\times B\subset\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m$（$A,B$ 分别为 $\mathbf{R}^n$ 与 $\mathbf{R}^m$ 中的可测集）上非负可测，则对 $a.e.$ 的 $x\in A$，$f(x,y)$ 作为 y 的函数在 B 上可测，且

$$\int_{A\times B}f(p)\mathrm{d}p=\int_A\mathrm{d}x\int_B f(x,y)\mathrm{d}y.$$

当然，对 $a.e.$ 的 $y\in B$，$f(x,y)$ 作为 x 的函数在 A 上可测，且

$$\int_{A\times B}f(p)\mathrm{d}p=\int_B\mathrm{d}y\int_A f(x,y)\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_A\mathrm{d}x\int_B f(x,y)\mathrm{d}y=\int_B\mathrm{d}y\int_A f(x,y)\mathrm{d}x.$$

（2）设 $f(p)=f(x,y)$ 在 $A\times B\subset\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m$ 上可积，则对 $a.e.$ 的 $x\in A$，$f(x,y)$ 作为 y 的函数在 B 上可积，又 $\int_B f(x,y)dy$ 作为 x 的函数在 A 上可积，且

$$\int_{A\times B}f(p)\mathrm{d}p=\int_A\mathrm{d}x\int_B f(x,y)\mathrm{d}y.$$

同样，对 $a.e.$ 的 $y\in B$，$f(x,y)$ 作为 x 的函数在 A 上可积，又 $\int_A f(x,y)\mathrm{d}x$ 作

① 富比尼（Fubini，1879—1943），意大利数学家.

为 y 的函数在 B 上可积，且

$$\int_{A\times B} f(p)dp = \int_B dy \int_A f(x,y)\mathrm{d}x\ .$$

从而

$$\int_B dy \int_A f(x,y)\mathrm{d}x = \int_A \mathrm{d}x \int_B f(x,y)dy\ .$$

证明　(1) 由定理 5.5.3 可知，$G(A\times B,f)$ 是 $\mathbf{R}^{n+m+1}$ 中的可测集，且

$$mG(A\times B,f) = \int_{A\times B} f(p)dp,$$

由定理 5.5.1 有

$$mG(A\times B,f) = \int_{\mathbf{R}^n} mG\ (A\times B,f)_x \mathrm{d}x,$$

其中，$mG(A\times B,f)_x$ 是 A 上几乎处处有定义的可测函数，由于

$$\mathbf{R}^{m+1} \supset G(A\times B,f)_x = \begin{cases} \{(y,z)\mid y\in B, 0\leqslant z < f(x,y)\}, & x\in A; \\ \varnothing, & x \bar{\in} A. \end{cases}$$

所以 $G(A\times B,f)_x$ 是将 x 固定后，$f(x,y)$ 看做是 y 的函数时，在 B 上的下方图形 $G(B,f(x,y)(x\text{ 固定}))$，于是当 $G(A\times B,f)_x$ 可测时，由定理 5.5.3 有

$$\begin{aligned} mG(A\times B,f)_x &= mG(B,f(x,y)\ (\ x\text{ 固定})) \\ &= \int_B f(x,y)dy\ . \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \int_{A\times B} f(p)dp &= mG(A\times B,f) \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} mG\ (A\times B,f)_x \mathrm{d}x \\ &= \int_A mG\ (A\times B,f)_x \mathrm{d}x \\ &= \int_A \mathrm{d}x \int_B f(x,y)dy\ . \end{aligned}$$

(2) 设 $f(p)$ 在 $A\times B$ 上可积，则 $f^+(p)$，$f^-(p)$ 在 $A\times B$ 上也可积，所以

$$\int_{A\times B} f(p)dp = \int_{A\times B} f^+(p)dp - \int_{A\times B} f^-(p)dp$$

$$= \int_A \mathrm{d}x \int_B f^+ (x,y) dy - \int_A \mathrm{d}x \int_B f^- (x,y) dy$$

$$= \int_A \mathrm{d}x \left(\int_B f^+ dy - \int_B f^- dy \right)$$

$$= \int_A \mathrm{d}x \int_B (f^+ - f^-) dy$$

$$= \int_A \mathrm{d}x \int_B f(x,y) dy .$$

定理得证.

例 5.5.1　设 $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ 定义在 $(0,1) \times (0,1)$ 上. 证明 $f(x,y)$ 在 $(0,1) \times (0,1)$ 上不是可积的.

证明　如果 $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ 在 $E = (0,1) \times (0,1)$ 上可积，则由 Fubini 定理，应有

$$\int_{(0,1)} \mathrm{d}x \int_{(0,1)} f(x,y) dy = \int_{(0,1)} dy \int_{(0,1)} f(x,y) \mathrm{d}x,$$

而

$$\int_{(0,1)} \mathrm{d}x \int_{(0,1)} f(x,y) dy = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_{(0,1)} dy \int_{(0,1)} f(x,y) \mathrm{d}x = \int_0^1 - \frac{1}{1 + y^2} dy = - \frac{\pi}{4},$$

因而 $f(x,y)$ 在 $E = (0,1) \times (0,1)$ 上不可积.

习　　题

1. 设 P 为 $(0,1)$ 上的康托集，

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{当 } x \in P; \\ e^x, & \text{当 } x \bar{\in} P. \end{cases}$$

计算 $\int_{(0,1)} f(x) \mathrm{d}x$.

2. 若 $f(x)$ 定义在 $[0,1]$ 上，

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\text{ 是大于}\dfrac{1}{3}\text{ 的无理数；}\\ x^3, & x\text{ 是小于}\dfrac{1}{3}\text{ 的无理数；}\\ 0, & \text{是有理数.}\end{cases}$$

计算 $\int_{[0,1]} f(x)\mathrm{d}x$.

3.(1) 证明函数列 $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}(n=1,2,\cdots)$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

(2) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \dfrac{nx}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x=0$.

4.设 $\{f_n(x)\}$ 是 E 上非负可积函数列，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)a.e.$ 于 E，且 $\int_E f_n(x)\mathrm{d}x\leqslant M$ (M 为常数). 证明 $f(x)$ 在 E 上可积，且 $\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant M$.

5.设 $\{f_n(x)\}$ 是 E 上的可测函数列，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_E |f_n(x)|\mathrm{d}x<\infty$. 证明

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0\ a.e.$ 于 E ；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 是 E 上的可积函数，且 $\int_E\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x$.

6.设 $mE<\infty$，$f(x)$ 在 E 上可积，$e_n=E[|f|\geqslant n]$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}nme_n=0$.

7.设 $mE<\infty$，$f(x)$ 是 E 上的可测函数，$E_n=E[n-1\leqslant f<n]$，则 $f(x)$ 在 E 上可积的充要条件是 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|n|mE_n<\infty$.

8.设 $\{f_n(x)\}$ 是 E 上非负可积函数列，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=0$，则 $f_n(x)\xrightarrow{m}0$.

9.设 $f(x)=\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{x^{\alpha}}$，$0<x\leqslant 1$，讨论 α 为何值时，$f(x)$ 为 $(0,1)$ 上 L 可积函数或不可积函数.

10.设 $mE\neq 0$，$f(x)$ 在 E 上可积，如果对于任何有界可测函数 $\varphi(x)$，都有 $\int_E f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=0$ ，则 $f(x)=0\ a.e.$ 于 E .

11. 试根据 $\frac{1}{1+x}=(1-x)+(x^2-x^3)+\cdots,0<x<1$，证明 $\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$.

12. 设 $f(x)$ 在 E 上可积，$f>0$ $a.e.$ 于 E，且 $\int_E f(x)\mathrm{d}x=0$，证明 $mE=0$.

13. 设 g 和 h 都是 E 上的可积函数，f 是 E 上的可测函数，且 $g\leqslant f\leqslant h$ $a.e.$ 于 E，则 f 在 E 上可积.

14. 设 f 在 E 上可积，g 在 E 上可测，且 $-\infty<a\leqslant g\leqslant b<+\infty$，证明存在 $c(a\leqslant c\leqslant b)$，使得 $\int_E g\,|f|\,\mathrm{d}x=c\int_E |f|\,\mathrm{d}x$.

15. 证明 $\int_0^1 \frac{x^p}{1-x}\ln\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(p+n)^2}(p>-1)$

16. 设 $mE<\infty$，$\{f_n(x)\}$ 是 E 上的几乎处处有限的可测函数列，证明 $\lim_{n\to\infty}\int_E \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\mathrm{d}x=0$ 的充分必要条件是 $f_n(x)\xrightarrow{m}0$.

17. 设由 $[0,1]$ 中取出 n 个可测子集 $E_1,E_2,\cdots,E_n$. 假定 $[0,1]$ 中任一点至少属于这 n 个集中的 q 个，试证必有一集，它的测度大于或等于 $\frac{q}{n}$.

18. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积，若对任何 $c(0<c<1)$，都有 $\int_0^c f(x)\mathrm{d}x=0$，则有 $f(x)=0$ $a.e.$ 于 $[0,1]$.

19. 证明：$\lim_{n\to\infty}\int_{(0,\infty)}\frac{1}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\cdot t^{\frac{1}{n}}}\mathrm{d}t=1$.

20. 在 D：$-1\leqslant x\leqslant 1,-1\leqslant y\leqslant 1$ 上定义

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x=y=0,\end{cases}$$

则 $f(x,y)$ 的两个累次积分存在且相等，但 $f(x,y)$ 在 D 上不可积.

第 6 章　微分与不定积分

在数学分析中的一元函数积分理论中有下面两个基本定理，揭示了微分与积分的运算关系：

(1) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则函数 $G(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $G'(x)=f(x)$.

(2) 如果 $G(x)$ 是具有连续导数的函数，$f(x)=G'(x)$，则等式 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = G(x)-G(a)$，即 $\int_a^x G'(t)\mathrm{d}t = G(x)-G(a)$ 成立.

现在我们知道 $[a,b]$ 上 Riemann 可积函数除去一个零测度集外都是连续的，(1)是说对于一个 R 可积函数 $f(x)$ 先积分再微分除去一个零测度集外都是可以还原的，(2)是说一个函数 $G(x)$ 的导函数 $G'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积时，先微分后积分也可以还原(至多相差一个常数).

现在有了 Lebesgue 积分理论，自然地会产生以下两个问题：

(1) 对于一个可积函数 $f(x)$，设 $G(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，$x\in[a,b]$. 是否有 $G'(x)=f(x)$ $a.e.$ 于 $[a,b]$.

(2) 在什么情况下，给定的函数 $G(x)$ 具有可积的导函数 $G'(x)=f(x)$，并且使 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = G(x)-G(a)$ 成立. 当然，我们现在只要求 $G(x)$ 的导函数是在几乎处处的意义下存在.

本章的主要内容就是研究这些问题.

因为 $G(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\int_a^x f^+(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f^-(t)\mathrm{d}t$，而 $\int_a^x f^+(t)\mathrm{d}t$ 和 $\int_a^x f^-(t)\mathrm{d}t$

都是 x 的单调增加函数，因而研究 $G(x)$ 的可微性就要考虑单调函数的可微性，因此，对问题的讨论就从这里开始.

6.1 单调函数的可微性

1. Vitali[①] 定理

定义 6.1.1 设 E 是 $\mathbf{R}$ 中的一个点集，$T=\{d\}$ 是 $\mathbf{R}$ 中长度为正的闭区间所成的集，如果对任意的 $x\in E$，总有一个区间列 $\{d_n\}\subset T$，使 $x\in d_n(n\in\mathbf{N}^+)$，$\lim\limits_{n\to\infty}md_n=0$，则称 T 是 E 的一个 **Vitali 覆盖.**

定义 6.1.1′ 设 E 是 $\mathbf{R}$ 中的一个点集，$T=\{d\}$ 是 $\mathbf{R}$ 中长度为正的闭区间所成的集. 如果对任意的 $x\in E$ 及任意的 $\varepsilon>0$，都有 $d\in T$，使 $x\in d$ 且 $md<\varepsilon$，则称 T 是 E 的一个 Vitali 覆盖.

定理 6.1.1(Vitali 覆盖定理) 设 $E\subset\mathbf{R}$，如果 $m^*E<\infty$，T 是 E 的一个 Vitali 覆盖，则可选出互不相交的区间列 $\{d_k\}\subset T$，使

$$m(E-\bigcup_k d_k)=0. \tag{6.1.1}$$

证明 由于 $m^*E<\infty$，可取开集 G，使 $E\subset G$ 且 $mG<\infty$，令 $T_1=\{d\mid d\in T,d\subset G\}$.

由于 G 是开集，T 是 E 的 Vitali 覆盖，所以 T_1 仍为 E 的 Vitali 覆盖.

任取 $d_1\in T_1$，如果已有 $m(E-d_1)=0$，则定理得证. 否则令

$$r_1=\sup\{md\mid d\in T_1,d\cap d_1=\varnothing\},$$

则 $0<r_1\leqslant mG<\infty$，取 $d_2\in T_1$，使 $md_2>\frac{1}{2}r_1$ 且 $d_1\cap d_2=\varnothing$.

如果 $\{d_1,d_2\}$ 满足式(6.1.1)，则定理得证. 否则，再作下去，一般地，如果 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 已由 T_1 中取出而不满足式(6.1.1)，则令

$$r_n=\sup\{md\mid d\in T_1,d\cap d_j=\varnothing,j=1,2,\cdots,n\},$$

---

① 维他利(1875—1932)，意大利数学家.

则 $0 < r_n < \infty$，再取 $d_{n+1} \in T_1$，使 $md_{n+1} > \frac{1}{2}r_n$，且有 $d_{n+1} \cap d_j = \varnothing, j = 1, 2, \cdots, n$.

如此继续下去，若在某一步取出的有限个闭区间 $d_1, d_2, \cdots, d_k$ 满足式(6.1.1)，则定理得证. 否则由归纳法便会得到一列闭区间 $\{d_k\}$.

往证 $\{d_k\}$ 满足式(6.1.1).

因为 $\{d_k\}$ 中各 d_k 互不相交且 $\{d_k\} \subset G$，所以有

$$\sum_{k=1}^{\infty} md_k = m(\bigcup_{k=1}^{\infty} d_k) \leqslant mG < \infty.$$

因此对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $n_0 > 0$，使 $\sum\limits_{k=n_0+1}^{\infty} md_k < \frac{\varepsilon}{5}$. 若 $E - \bigcup\limits_k d_k = \varnothing$，则 $\{d_k\}$ 满足式(6.1.1). 否则，任取 $y \in E - \bigcup\limits_k d_k$，存在 $d_y \in T_1$，使 $y \in d_y$，且 $d_y \cap d_j = \varnothing$，$j = 1, 2, \cdots, n_0$. 可以证明存在 $n > n_0$，使 $d_y \cap d_n \neq \varnothing$. 事实上，如果对任何 $n > n_0$，总有 $d_y \cap d_n = \varnothing$，则由 r_n 的定义与 $\{d_k\}$ 的构造有 $md_y \leqslant r_n \leqslant 2md_{n+1}$，然而 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} md_k < \infty$，所以 $md_k \to 0 (k \to \infty)$. 从而 $md_y = 0$，这与 $md_y > 0$ 矛盾.

令 $k_0 = \min\{k \mid d_y \cap d_k \neq \varnothing, k > n_0\}$，令 x_{k_0} 是 d_{k_0} 的中点，则

$$| y - x_{k_0} | \leqslant md_y + \frac{1}{2}md_{k_0},$$

因为 $md_y \in \{md \mid d \cap d_j = \varnothing, j = 1, 2, \cdots, k_0 - 1\}$，所以 $md_y \leqslant r_{k_0 - 1} \leqslant 2md_{k_0}$，因而

$$(y - x_{k_0}) \leqslant md_y + \frac{1}{2}md_{k_0} \leqslant \frac{5}{2}md_{k_0}. \tag{6.1.2}$$

设 x_k 是 $d_k (k = 1, 2, \cdots)$ 的中点，对每一个 $k > n_0$，e_k 是以 x_k 为中点，$me_k = 5md_k$ 的闭区间. 由于 $k_0 > n_0$，且由(6.1.2)式有 $y \in e_{k_0} \subset \bigcup\limits_{k=n_0+1}^{\infty} e_k$，因此

$$E - \bigcup_k d_k \subset \bigcup_{k=n_0+1}^{\infty} e_k,$$

然而

$$m(\bigcup_{k=n_0+1}^{\infty} e_k) \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{\infty} me_k = 5\sum_{k=n_0+1}^{\infty} md_k < \varepsilon,$$

所以

$$m(E-\bigcup_{k} d_k) = m^*(E-\bigcup_{k} d_k) \leqslant m(\bigcup_{k=n_0+1}^{\infty} e_k) = 0 .$$

定理得证.

Vitali 覆盖定理也可以写成下面的形式.

定理 6.1.1′(Vitali 覆盖定理) 设 $E \subset \mathbf{R}$,如果 $m^* E < \infty$,T 是 E 的一个 Vitali 覆盖,则对于任意的 $\varepsilon > 0$,都可以从 T 中选出有限多个互不相交的闭区间 $d_1, d_2, \cdots, d_n$,使

$$m^*(E-\bigcup_{k=1}^{n} d_k) < \varepsilon .$$

在定理 6.1.1 的证明过程中,取 $n_0 > 0$,使 $\sum_{k=n_0+1}^{\infty} md_k < \varepsilon$,则

$$m^*(E-\bigcup_{k=1}^{n} d_k) \leqslant m^*(E-\bigcup_{k=1}^{\infty} d_k) + m(\bigcup_{k=n_0+1}^{\infty} d_k) < \varepsilon .$$

定理得证.

2. 单调函数的可微性

定义 6.1.2 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的有限函数,$x_0 \in [a,b]$,若存在数列 $h_n \to 0 (h_n \neq 0)$,使极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n} = \lambda$$

存在(有限,$-\infty$ 或 $+\infty$),则称 λ 为 $f(x)$ 在 x_0 的一个**列导数**,记成 $\lambda = Df(x_0)$. 列导数 $Df(x_0)$ 与数列 h_n 的取法有关. 如果 $f(x)$ 在 x_0 的一切(可能存在的)列导数相等,则称 $f(x)$ 在 x_0(广义)可微. 如果这些可能的列导数相等且有限,则称 $f(x)$ 在 x_0 **可微**.

引理 1 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的严格增加函数,如果对于 $E \subset [a,b]$ 中的每一点 x,存在一个列导数 $Df(x) \leqslant p (p \geqslant 0)$,则

$$m^* f(E) \leqslant pm^* E . \tag{6.1.3}$$

证明 任取常数 $p_0 > p$,设 $x_0 \in E$,则由列导数定义,有数列 $\{h_n\}$,$h_n \to 0 (n \to \infty)$,满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=Df(x_0)<p_0\,. \tag{6.1.4}$$

另一方面，对任意的 $\varepsilon>0$，取开集 G，满足

$$E\subset G, mG<m^*E+\varepsilon\,. \tag{6.1.5}$$

记 $d_n(x_0)=[x_0,x_0+h_n]$，$\Delta_n(x_0)=[f(x_0),f(x_0+h_n)]$，它们都是闭区间，因为在 $\{h_n\}$ 中总能抽出一个同号的子序列 $\{h_{n_k}\}$，使式(6.1.4)成立，所以不妨设 $h_n>0(n\in\mathbf{N}^+)$.

由于 $f(x)$ 是增函数，所以 $f[d_n(x_0)]\subset\Delta_n(x_0)$，$md_n(x_0)\to 0(n\to\infty)$，且 G 是开集，因此对一切充分大的 n，有

$$d_n(x_0)\subset G\,,\ \frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}<p_0\,.$$

不妨设上面两个关系式对一切 n 同时成立，于是有 $m\Delta_n(x_0)<p_0md_n(x_0)$.

因而 $m\Delta_n(x_0)\to 0(n\to\infty)$. 这样，闭区间集 $\{\Delta_n(x)\mid x\in E\}$ 依 Vitali 意义覆盖 $f(E)$，因而由 Vitali 定理，可取互不相交的区间列 $\{\Delta_{n_i}(x_i)\}$，使

$$m[f(E)-\bigcup_i\Delta_{n_i}(x_i)]=0\,.$$

从而有

$$m^*f(E)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}m\Delta_{n_i}(x_i)<p_0\sum_{i=1}^{\infty}md_{n_i}(x_i)=p_0m(\bigcup_{i=1}^{\infty}d_{n_i}(x_i))\,.$$

由于 $\bigcup_{i=1}^{\infty}d_{n_i}(x_i)\subset G$，由(6.1.5)式有

$$m^*f(E)<p_0mG<p_0(m^*E+\varepsilon)\,.$$

令 $\varepsilon\to 0$，$p_0\to p$，有 $m^*f(E)\leqslant pm^*E$. 引理得证.

引理 2　设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的严格增加函数，如果对于 $E\subset[a,b]$ 中每一点 x，存在一个列导数 $Df(x)\geqslant q(q\geqslant 0)$，则 $m^*f(E)\geqslant qm^*E$.

证明　因为 $y=f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的严格增加函数，所以逆映射 $x=f^{-1}(y)$ 是 $[f(a),f(b)]$ 的子集 $f([a,b])$ 到 $[a,b]$ 上的严格增加函数. 当 $q=0$ 时结论显然成立，所以不妨设 $q>0$. 设 M 是 E 中 $f(x)$ 的不连续点集，任取 $x_0\in E-M$，往证 $f(x)$ 在 $x_0\in E$ 有一个列导数 $Df(x_0)$，则 $f^{-1}(y)$ 在 $y_0=f(x_0)$ 有一个列导数 $Df^{-1}(y_0)\leqslant\dfrac{1}{q}$.

事实上，存在 $h_n \neq 0$，使

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{-1}(y_0+k_n)-f^{-1}(y_0)}{k_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(x_0+h_n)-x_0}{f(x_0+h_n)-f(x_0)}=\frac{1}{Df(x_0)}\leqslant\frac{1}{q},$$

其中，$k_n = f(x_0+h_n)-f(x_0)\to 0(n\to\infty)$，即对任何 $y_0\in f(E-M)$，有 $Df^{-1}(y_0)\leqslant\frac{1}{q}$.

由引理 1，有

$$m^* f^{-1}(f(E-M))\leqslant\frac{1}{q}m^* f(E-M).$$

此即

$$m^* f(E-M)\geqslant qm^*(E-M).$$

因为 M 是 E 中单调增加函数 $f(x)$ 的不连续点集，$f(M)$ 是单调增加函数 $f^{-1}(y)$ 在 $f(E)$ 中的不连续点集，因而 $m^* M = m^* f(M) = 0$. 从而

$$\begin{aligned}m^* f(E) &= m^*(f(E-M)\cup f(M))\\&= m^* f(E-M)\\&\geqslant qm^*(E-M)\\&= q(m^* E - m^* M)\\&= qm^* E.\end{aligned}$$

引理得证.

定理 6.1.2　设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的单调函数，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处存在有限导数.

证明　不妨设 $f(x)$ 为增函数.

(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有限或无穷大导数几乎处处存在.

若 $f(x)$ 是单调增加函数，则 $g(x)=f(x)+x$ 是严格增加函数，且 $g(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的可微性，实际上在存在列导数的点 x，有 $Dg(x)=Df(x)+1$.

因此设 $f(x)$ 是严格增加函数.

设 $E=\{x \mid f'(x) \text{ 不存在}\}$，任取 $x_0\in E$，则必有两个列导数 $D_1 f(x_0)$ 与 $D_2 f(x_0)$ 不相等，不妨设 $D_1 f(x_0) < D_2 f(x_0)$，那么有两个有理数 p,q，满足

$$D_1 f(x_0) < p < q < D_2 f(x_0).$$

令 $E_{pq} = \{x \mid D_1 f(x) < p < q < D_2 f(x), x \in E\}$，不难看出 $E = \bigcup_{p,q\in \mathbf{Q}} E_{pq}$.

由引理1及引理2知 $qm^* E_{pq} \leqslant m^* f(E_{pq}) \leqslant pm^* E_{pq}$. 由于 $q > p$ ，所以 $m^* E_{pq} = 0$ ，因而 $mE = 0$. 于是 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处存在.

(2)设 $E_0 = E[f'(x) = \infty]$ ，往证 $mE_0 = 0$ ，仍然假设 $f(x)$ 是严格增加函数. 对每一个正整数 n ，有 $Df(x) \geqslant n (x \in E_0)$.

由引理2，$m^* f(E_0) \geqslant n \cdot m^* E_0$ ，但 $m^* f(E_0) \leqslant f(b) - f(a)$ ，因而

$$m^* E_0 \leqslant \frac{1}{n}[f(b) - f(a)],$$

令 $n \to \infty$ 得 $mE_0 = 0$.

这样，$f'(x)$ 几乎处处存在且几乎处处有限，定理得证.

定理 6.1.3 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上定义的单调函数，则 $f'(x)$ 可积，如果 $f(x)$ 是单调增加函数，还有

$$\int_{[a,b]} f'(x)\mathrm{d}x \leqslant f(b) - f(a). \tag{6.1.6}$$

证明 不妨设 $f(x)$ 是单调增加函数，这样不影响 $f'(x)$ 可积性的证明，如果 $f(x)$ 是单调减少函数，则 $-f(x)$ 是单调增加函数.

设 $g_n(x) = n[f(x+\frac{1}{n}) - f(x)]$.

当 $x \geqslant b$ 时，令 $f(x) = b$ ，则 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = f'(x) a.e.$ 于 $[a,b]$. 由于 $f(x)$ 是单调增加函数，因而是可测函数，所以各 $g_n(x)$ ，$f'(x)$ 及 $|f'(x)|$ 都是可测函数. 而 $\{g_n(x)\}$ 是非负可测函数列. 由 Fatou 引理有

$$\begin{aligned}
\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x &\leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x \\
&= \varliminf_{n\to\infty}\left[n\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x - n\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right] \\
&= \varliminf_{n\to\infty}\left[n\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x - n\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x\right] \\
&= \varliminf_{n\to\infty}\left[f(b) - n\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x\right] \\
&\leqslant \varliminf_{n\to\infty}[f(b) - f(a)]
\end{aligned}$$

$$= f(b) - f(a)$$

这里,在 $f'(x)$ 不存在的点上令 $f'(x) = 0$,所以 $f'(x)$ 可积且 $f'(x) < \infty$ *a.e.* 于 $[a,b]$,而且

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x \leqslant f(b) - f(a) .$$

定理得证.

注:式(6.1.6)中的严格不等式是可以成立的.

例 6.1.1 设 P 是 $[0,1]$ 中的 Cantor 集,将它的余区间按长度大小作如下的分类:第一类是由长度为 $\frac{1}{3}$ 的一个区间 $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ 构成;第二类是由长度为 $\frac{1}{3^2}$ 的两个区间 $(\frac{1}{9},\frac{2}{9})$, $(\frac{7}{9},\frac{8}{9})$ 构成;第三类有长度为 $\frac{1}{3^3}$ 的 4 个区间 $(\frac{1}{27},\frac{2}{27})$, $(\frac{7}{27},\frac{8}{27})$, $(\frac{19}{27},\frac{20}{27})$, $(\frac{25}{27},\frac{26}{27})$;一般地,第 n 类中有 2^{n-1} 个长度为 $\frac{1}{3^n}$ 的区间 $(\frac{1}{3^n},\frac{2}{3^n})$, $(\frac{7}{3^n},\frac{8}{3^n})$, $(\frac{19}{3^n},\frac{20}{3^n})$,…, $(\frac{3^n-2}{3^n},\frac{3^n-1}{3^n})$.

作定义在 $[0,1]$ 上的函数 $\theta(x)$ 如下:

$$\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in (\frac{1}{3},\frac{2}{3}); \\ \frac{1}{4}, & x \in (\frac{1}{9},\frac{2}{9}); \\ \frac{3}{4}, & x \in (\frac{7}{9},\frac{8}{9}); \\ \cdots\cdots \end{cases}$$

在第三类的 4 个区间上, $\theta(x)$ 依次取 $\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{5}{8},\frac{7}{8}$. 一般地,在第 n 类的 2^{n-1} 个区间上, $\theta(x)$ 依次取值 $\frac{1}{2^n},\frac{3}{2^n},\frac{5}{2^n},\cdots,\frac{2^n-1}{2^n}$.

于是 $\theta(x)$ 在 P 的余集 G 上有定义,它在 G 的每一个构成区间上是常数,且限制在 G 上为增函数,将 $\theta(x)$ 连续延拓到整个 $[0,1]$ 上,定义如下:

$\theta(0) = 0$, $\theta(1) = 1$,当 $x \in (0,1) \cap P$ 时,令

$$\theta(x) = \sup_{\substack{t<x \\ t\in G}} \theta(t) ,$$

则 $\theta(x)$ 是 $[0,1]$ 上的增函数，往证 $\theta(x)$ 是连续函数. 事实上，如果 $\theta(x)$ 在某点 x_0 不连续，则区间 $(\theta(x_0-0),\theta(x_0+0))$ 中一切数除 $\theta(x_0)$ 外将不是 $\theta(x)$ 的函数值，这与 $\theta(x)$ 的函数值在 $[0,1]$ 中稠密的事实相矛盾. 所以 $\theta(x)$ 是连续的增函数.

由于 $\theta'(x)=0\ a.e.$ 于 $[0,1]$，因此 $\int_{[0,1]}\theta'(x)\mathrm{d}x=0<1=\theta(1)-\theta(0)$.

6.2　有界变差函数

有界变差函数类和单调函数类一样，都是很重要的函数类，而且有界变差函数与单调增加函数还有很密切的联系. 有界变差函数的概念在历史上是由于考察曲线的弧长而引入的，在本节我们就要围绕有界变差函数概念来讨论这些问题.

定义 6.2.1　设 $f(x)$ 是定义于 $[a,b]$ 上的有限函数，对 $[a,b]$ 的任一分划

$$T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

作和式 $V(T)=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$，称 $V(T)$ 为 $f(x)$ 相应于分划 T 的变差.

令 $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\sup_T V(T)$，称之为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的全变差.

若 $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)<\infty$，则称 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的**有界变差函数**，记为 $f\in BV[a,b]$，$BV[a,b]$ 表示由在 $[a,b]$ 上的有界变差函数全体所组成的函数类.

定理 6.2.1　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是有界变差的，$a<c<b$，则 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上也是有界变差的. 并且有等式 $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\overset{c}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{V}}(f)$.

证明　设 $T_1: a=y_0<y_1<\cdots<y_m=c$ 是 $[a,c]$ 的任一分划，$T_2: c=z_0<z_1<\cdots<z_n=b$ 是 $[c,b]$ 的任一分划. 将 T_1,T_2 合并为 T，则 T 是 $[a,b]$ 的一个分划，有

$$V(T_1)+V(T_2)=V(T)\leqslant \overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

这说明，当 $f\in BV[a,b]$ 时，$f\in BV[a,c]$ 以及 $f\in BV[c,b]$，并且

$$\overset{c}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{V}}(f)\leqslant \overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

下证相反的不等式也成立. 设 T 是 $[a,b]$ 的任一分划 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，设 $x_m\leqslant c<x_{m+1}$，这就确定了 $[a,c]$ 上的一个分划 $T_1: a=x_0<x_1<\cdots<$

$x_m \leqslant c$ 及 $[c,b]$ 上的一个分划 $T_2: c < x_{m+1} < \cdots < x_n = b$.

$$\begin{aligned} V(T) &= \sum_{i=1}^{n} | f(x_i) - f(x_{i-1}) | \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{m} | f(x_i) - f(x_{i-1}) | + | f(c) - f(x_m) | \\ &\quad + | f(x_{m+1}) - f(c) | + \sum_{i=m+2}^{n} | f(x_i) - f(x_{i-1}) | \\ &= V(T_1) + V(T_2) \leqslant \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f), \end{aligned}$$

由此 $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \leqslant \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f)$，所以 $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f)$.

定理 6.2.2 (1) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是有界变差的，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界；

(2) 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上都是有界变差的，则 $f(x) \pm g(x)$，$f(x)g(x)$ 和 $f(x)/g(x)(g(x) \geqslant \sigma > 0)$ 都是有界变差的.

证明 (1) 任取 $x \in [a,b]$，令 $T: a \leqslant x \leqslant b$，有

$$V(T) = | f(x) - f(a) | + | f(b) - f(x) | \leqslant \overset{b}{\underset{a}{V}}(f),$$

由此

$$| f(x) | - | f(a) | \leqslant | f(x) - f(a) | \leqslant \overset{b}{\underset{a}{V}}(f),$$

即

$$| f(x) | \leqslant \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) + | f(a) |,$$

因而 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界函数.

(2) 设 $h(x) = f(x) + g(x)$，T 是 $[a,b]$ 的任一分划：$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} | h(x_i) - h(x_{i-1}) | &\leqslant \sum_{i=1}^{n} (| f(x_i) - f(x_{i-1}) | + | g(x_i) - g(x_{i-1}) |) \\ &\leqslant \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{a}{V}}(g), \end{aligned}$$

所以

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(h) \leqslant \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{a}{V}}(g) < +\infty,$$

因此，$h(x) = f(x) + g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数.

同理可证 $f(x)-g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数.

设 $p(x)=f(x)g(x)$.

由(1)知,存在 $M>0$,使 $|f(x)|\leqslant M$ 且 $|g(x)|\leqslant M$.

设 T 是 $[a,b]$ 的任一分划: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$

$$\begin{aligned}
V(T,p) &= \sum_{i=1}^{n} |p(x_i)-p(x_{i-1})| \\
&= \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)g(x_i)-f(x_{i-1})g(x_{i-1})| \\
&= \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)g(x_i)-f(x_i)g(x_{i-1})+ \\
&\quad f(x_i)g(x_{i-1})-f(x_{i-1})g(x_{i-1})| \\
&\leqslant M\sum_{i=1}^{n} |g(x_i)-g(x_{i-1})|+M\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)-f(x_{i-1})| \\
&\leqslant M\overset{b}{\underset{a}{V}}(g)+M\overset{b}{\underset{a}{V}}(f).
\end{aligned}$$

所以 $p(x)=f(x)\cdot g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数.

下证 $\dfrac{1}{g(x)}\in BV[a,b]$. 对 $[a,b]$ 的任一分划 T: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$.

$$\begin{aligned}
V(T,\frac{1}{g}) &= \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{1}{g(x_i)}-\frac{1}{g(x_{i-1})}\right| \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{g(x_{i-1})-g(x_i)}{g(x_i)g(x_{i-1})}\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{|g(x_i)-g(x_{i-1})|}{\sigma^2} \\
&\leqslant \frac{1}{\sigma^2}\overset{b}{\underset{a}{V}}(g),
\end{aligned}$$

所以 $\dfrac{1}{g(x)}\in BV[a,b]$,这样 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数.

例 6.2.1　$[a,b]$ 上的任何单调函数 $f(x)$ 是有界变差函数.

证明　不妨设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加,对 $[a,b]$ 的任意分划 T: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,有

$$V(T)=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

$$= [f(x_1) - f(x_0)] + [f(x_2) - f(x_1)] + \cdots + [f(x_n) - f(x_{n-1})]$$
$$= f(x_n) - f(x_0)$$
$$= f(b) - f(a) ,$$

所以 $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \leqslant f(b) - f(a) < +\infty$,因此 $f(x)$ 是有界变差函数.

定理 6.2.3(Jordan[①] 分解定理) $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数,当且仅当 $f(x)$ 可以分解为两个单调增加函数的差.

证明 充分性.若 $f(x)$ 可以分解为两个单调增加函数之差,则由于单调函数是有界变差函数及定理 6.2.2 可知 $f(x)$ 是有界变差函数.

必要性.令

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\{\overset{x}{\underset{a}{V}}(f) + f(x)\} , \psi(x) = \frac{1}{2}\{\overset{x}{\underset{a}{V}}(f) - f(x)\} .$$

因为当 $x' > x$ 时,

$$| f(x) - f(x') | \leqslant \overset{x'}{\underset{x}{V}}(f) = \overset{x'}{\underset{a}{V}}(f) - \overset{x}{\underset{a}{V}}(f) ,$$

即 $\overset{x'}{\underset{a}{V}}(f) - \overset{x}{\underset{a}{V}}(f) \geqslant f(x) - f(x')$,且 $\overset{x'}{\underset{a}{V}}(f) - \overset{x}{\underset{a}{V}}(f) \geqslant f(x') - f(x)$,

所以 $\overset{x}{\underset{a}{V}}(f) + f(x) \leqslant \overset{x'}{\underset{a}{V}}(f) + f(x')$,且 $\overset{x}{\underset{a}{V}}(f) - f(x) \leqslant \overset{x'}{\underset{a}{V}}(f) - f(x')$.

这说明 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 都是单调增加函数,而 $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$. 定理得证.

Jordan 分解不是唯一的,事实上,若 $f = \varphi - \psi$ 是 f 的 Jordan 分解,则因为对任意的常数 c , $\varphi + c$ 和 $\psi + c$ 仍然是单调增加函数,因而 $f = (\varphi + c) - (\psi + c)$ 也是 f 的 Jordan 分解.

我们引入函数

$$p(x) = \frac{1}{2}\{\overset{x}{\underset{a}{V}}(f) + f(x) - f(a)\} ,$$

$$n(x) = \frac{1}{2}\{\overset{x}{\underset{a}{V}}(f) - f(x) + f(a)\} ,$$

分别称 $p(x)$ 和 $n(x)$ 为 $f(x)$ 的正变差函数和负变差函数. 而

---

① 若当(Jordan,1838—1922),法国数学家.

$$\overset{x}{\underset{a}{V}}(f) = p(x) + n(x) , \tag{6.2.1}$$

$$f(x) - f(a) = p(x) - n(x) . \tag{6.2.2}$$

称式(6.2.1)和式(6.2.2)为 $f(x)$ 的正规分解.

定理 6.2.4　设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处有有限导数, $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Lebesgue 可积,并且 $\int_{[a,b]} |f'(x)| \mathrm{d}x \leqslant \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$.

证明　由 Jordan 分解定理及定理 6.1.2 和定理 6.1.3 可知, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处有有限导数,且 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Lebesgue 可积.

设 $f(x) - f(a) = p(x) - n(x)$ 是 $f(x)$ 的正规分解,其中

$$p(x) = \frac{1}{2}\{\overset{x}{\underset{a}{V}}(f) + f(x) - f(a)\} ,$$

$$n(x) = \frac{1}{2}\{\overset{x}{\underset{a}{V}}(f) - f(x) + f(a)\} ,$$

则 $f'(x) = p'(x) - n'(x) a.e.$ 于 $[a,b]$.

$$\int_{[a,b]} p'(x)\mathrm{d}x \leqslant p(b) - p(a) ,$$

$$\int_{[a,b]} n'(x)\mathrm{d}x \leqslant n(b) - n(a) ,$$

所以

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} |f'(x)| \mathrm{d}x &\leqslant \int_{[a,b]} p'(x)\mathrm{d}x + \int_{[a,b]} n'(x)\mathrm{d}x \\ &\leqslant (p(b) - p(a)) + (n(b) - n(a)) .\end{aligned}$$

因为 $p(a) = n(a) = 0$,

$$p(b) = \frac{1}{2}\{\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) + f(b) - f(a)\} ,$$

$$n(b) = \frac{1}{2}\{\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) - f(b) + f(a)\} ,$$

所以 $p(b) + n(b) = \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$,从而

$$\int_{[a,b]} |f'(x)| \mathrm{d}x \leqslant \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) .$$

定理得证.

例 6.2.2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 Lipschitz① 条件,即存在常数 K,使得对于任意的 x, $x' \in [a,b]$ 时,有

$$|f(x)-f(x')| \leqslant K|x-x'|,$$

那么 $f(x)$ 是有界变差函数.

证明 设 T 是 $[a,b]$ 的任一分划 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,

$$\begin{aligned}V(T) &= \sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})| \\ &\leqslant K\sum_{i=1}^{n}|x_i-x_{i-1}| \\ &= K(b-a).\end{aligned}$$

所以,$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \leqslant K(b-a)<+\infty$,即 $f \in BV[a,b]$.

例 6.2.3 设 $f(x)=\begin{cases}x\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$,则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,但不是有界变差的.

事实上,对于任意的 M,都可找到正整数 n,使 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\pi M$. 考虑 $[0,1]$ 上的分划 T:

$$0=x_0<\frac{1}{n\pi}<\frac{1}{(n-1)\pi}<\cdots<\frac{1}{\pi}<x_{n+1}=1,$$

$$\begin{aligned}V(T) &= \sum_{i=1}^{n+1}|f(x_i)-f(x_{i-1})| \geqslant \sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})| \\ &= \left|\frac{1}{n\pi}-0\right|+\left|\frac{1}{(n-1)\pi}+\frac{1}{n\pi}\right|+\cdots+\left|\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2\pi}\right| \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{n}+\frac{2}{n-1}+\cdots+\frac{2}{2}+1\right) \\ &> M.\end{aligned}$$

因而 $f(x)$ 不是 $[0,1]$ 上的有界变差函数.

---

① 利普希茨(1832—1903),德国数学家.

因为在数学的发展历史中，是由研究曲线长度问题引入有界变差函数概念的，所以下面我们研究平面连续曲线的弧长与有界变差函数的关系.

定义 6.2.2　设 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ 都是 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数，它们所确定的曲线 C 称为平面连续曲线. 任作 $[\alpha,\beta]$ 的一个分划 $T:\alpha=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=\beta$ ，以各点 $(\varphi(t_i),\psi(t_i))$ 为顶点，作 C 的一条内接折线 $P(T)$ ，则 $P(T)$ 之长 $|P(T)|$ 为

$$|P(T)|=\sum_{i=1}^{n}\{[\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})]^2+[\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})]^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

如果对于 $[\alpha,\beta]$ 的一切分划 T ，$\{|P(T)|\}$ 是一有界数集，则称曲线 C 是可求长的，并称其上确界 $L=\sup\limits_{T}\{|P(T)|\}$ 为 C 的长度.

定理 6.2.5　连续曲线 $C:x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$ ，可求长的充要条件是 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 都是 $[\alpha,\beta]$ 上的有界变差函数.

证明　充分性. 设 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 都是 $[\alpha,\beta]$ 上的有界变差函数，则对于任意一条内接折线 $P(T)$.

$$\begin{aligned}|P(T)|&=\sum_{i=1}^{n}\{(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}))^2+(\psi(t_i)-\psi(t_{i-1}))^2\}^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\{(|\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})|+|\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})|)^2\}^{\frac{1}{2}}\\&=\sum_{i=1}^{n}|\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})|+\sum_{i=1}^{n}|\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})|\\&\leqslant\bigvee_{\alpha}^{\beta}(\varphi)+\bigvee_{\alpha}^{\beta}(\psi)<+\infty.\end{aligned}$$

因而 C 是可求长的.

必要性. 以 $\varphi(t)$ 为例. 设 $T:\alpha=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=\beta$ 是 $[\alpha,\beta]$ 的任一分划，L 是曲线 C 的长度，则

$$\sum_{i=1}^{n}|\varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1})|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\{|\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})|^2+|\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})|^2\}^{\frac{1}{2}}\leqslant L,$$

所以 $\varphi(t)$ 是有界变差函数，同理 $\psi(t)$ 是有界变差函数.

6.3 不定积分与绝对连续函数

定义 6.3.1 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Lebesgue 可积,则 $[a,b]$ 上的函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+c$ (c 为任一常数)称为 $f(x)$ 的**不定积分**.

定义 6.3.2 设 $F(x)$ 为 $[a,b]$ 上的有限函数,如果对任何 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使对 $[a,b]$ 中互不相交的任意有限个开区间 $(a_i,b_i),i=1,2,\cdots,n$,只要 $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$,就有 $\sum_{i=1}^{n}|F(b_i)-F(a_i)|<\varepsilon$,则称 $F(x)$ 为 $[a,b]$ 上的绝对连续函数.

例 6.3.1 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 Lipschitz 条件,则 $f(x)$ 是绝对连续函数.

证明 由假设存在常数 $K>0$,使对任意的 $x,x'\in[a,b]$,有

$$|f(x)-f(x')|\leqslant K|x-x'|.$$

对任意的 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\frac{\varepsilon}{K}$,则对任意有限个互不相交的开区间 $(a_i,b_i)(i=1,2,\cdots,n)$,只要 $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$,就有

$$\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|\leqslant\sum_{i=1}^{n}K(b_i-a_i)<K\cdot\delta=\varepsilon.$$

因此 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数.

定理 6.3.1 绝对连续函数是一致连续函数且是有界变差函数.

证明 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数,则对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,对任意的 $x',x''\in[a,b]$ (不妨设 $x'<x''$),只要 $|x''-x'|=x''-x'<\delta$,就有 $|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$,因此 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的一致连续函数.

由于 $f(x)$ 是绝对连续函数,对于 $\varepsilon=1$,存在 $\delta>0$,使得对任意有限个互不相交的开区间 $(a_i,b_i),i=1,2,\cdots,n$,只要 $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$,就有 $\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|<1$,对区间 $[a,b]$ 作一个最大子区间长度小于 δ 的分划

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_M=b,$$

固定 M ,对 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,M)$ 上的任一分划

$$x_{i-1}=y_0<y_1<\cdots<y_{j_i}=x_i\ ,$$

因为 $\sum_{k=1}^{j_i}(y_k-y_{k-1})=x_i-x_{i-1}<\delta$，所以 $\sum_{k=1}^{j_i}(f(y_k)-f(y_{k-1}))<1$.

因此 $\bigvee_{x_{i-1}}^{x_i}(f)\leqslant 1(i=1,2,\cdots,M)$，于是 $\bigvee_a^b(f)=\sum_{i=1}^{M}\bigvee_{x_{i-1}}^{x_i}(f)\leqslant M$.

即 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数.

定理 6.3.2　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则其不定积分为绝对连续函数.

证明　设 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+c$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的不定积分，由 $|f(x)|$ 积分的绝对连续性，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得 $A\subset[a,b]$，$mA<\delta$ 时，有 $\int_A|f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$.

任取 $A=\bigcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i)$，其中各个开区间互不相交，则当 $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$ 时有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|F(b_i)-F(a_i)|&=\sum_{i=1}^{n}\left|\int_{a_i}^{b_i}f(x)\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\int_{a_i}^{b_i}|f(x)|\mathrm{d}x\\&=\int_A|f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon\ ,\end{aligned}$$

因此，$F(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数.

定理 6.3.3　设 $F(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，$F'(x)=0\ a.e.$ 于 $[a,b]$，则 $F(x)$ 为常数函数.

证明　设 $c\in[a,b]$，往证 $F(c)=F(a)$.

由 $F'(x)=0\ a.e.$ 于 $[a,b]$，存在 $A\subset(a,c)$，使 $mA=c-a$，且当 $x\in A$ 时，$F'(x)=0$，令 $B=(a,c)-A$，则 $mB=0$.

对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使对任意有限个互不相交的开区间 (a_i,b_i)，$i=1,2,\cdots,n$，当 $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$ 时，就有

$$\sum_{i=1}^{n}|F(b_i)-F(a_i)|<\frac{\varepsilon}{2}.\qquad(6.3.1)$$

任取 $x\in A$，由于 $F'(x)=0$，取 $h>0$ 充分小，使 $[x,x+h]\subset(a,c)$，且

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\right|<\frac{\varepsilon}{2(c-a)}. \tag{6.3.2}$$

闭区间集 $\{[x,x+h] \mid x\in A,[x,x+h]\subset(a,c)$ 且式(6.3.2)成立$\}$，依 Vitali 意义覆盖 A，由 Vitali 覆盖定理可知，对上述 $\delta>0$，有有限个互不相交的区间 $d_1=[x_1,x_1+h_1]$, $d_2=[x_2,x_2+h_2]$, $\cdots$, $d_n=[x_n,x_n+h_n]$，使 $m(A-\bigcup_{i=1}^{n}d_i)<\delta$.

为确定起见，不妨设 $x_1<x_2<\cdots<x_n$（必要时可重新编序），由 $m(A-\bigcup_{i=1}^{n}d_i)<\delta$ 可知 $m([a,c]-\bigcup_{i=1}^{n}d_i)<\delta$，于是由式(6.3.1)有

$$|F(x_1)-F(a)|+\sum_{i=1}^{n-1}|F(x_{i+1})-F(x_i+h_i)|+|F(b)-F(x_n+h_n)|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{6.3.3}$$

由式(6.3.2)有

$$\sum_{i=1}^{n}|F(x_i+h_i)-F(x_i)|<\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i\varepsilon}{2(c-a)}=\frac{\varepsilon}{2(c-a)}\sum_{i=1}^{n}h_i<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{6.3.4}$$

由式(6.3.3)和式(6.3.4)有

$$\begin{aligned}|F(c)-F(a)|&=|F(x_1)-F(a)|+\sum_{i=1}^{n-1}|F(x_{i+1})-F(x_i+h_i)|\\&\quad+|F(b)-F(x_n+h_n)|+\sum_{i=1}^{n}|F(x_i+h_i)-F(x_i)|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\end{aligned}$$

所以 $F(c)=F(a)$. 因此 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上为常数函数. 定理得证.

定理 6.3.4 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+c$，则 $F'(x)=f(x)\ a.e.$ 于 $[a,b]$.

证明 由定理 6.3.2 知 $F(x)$ 是绝对连续函数，又由定理 6.3.1 知 $F(x)$ 是有界变差函数，因此 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 几乎处处存在有限导数.

(1)往证 $F'(x)\leqslant f(x)\ a.e.$ 于 $[a,b]$. 令 E_{pq} 为 (a,b) 中使 $F'(x)$ 存在且满足 $F'(x)>q>p>f(x)$ 的点集，我们证明 $mE_{pq}=0$.

由 $f(x)$ 积分的绝对连续性，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$（令 $\delta\leqslant\varepsilon$），使得 $A\subset[a,b]$，$mA<\delta$ 时，有

$$\int_A f(x)\mathrm{d}x<\varepsilon. \tag{6.3.5}$$

对此 $\delta>0$，取开集 G 使 $E_{pq}\subset G\subset[a,b]$，而 $mG<mE_{pq}+\delta$.

由 E_{pq} 的定义，对每个 $x\in E_{pq}$，当 $h>0$ 充分小时，有

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}>q, \tag{6.3.6}$$

因为 G 是开集，可使上述 h 全都满足 $[x,x+h]\subset G$. 这样，闭区间集 $\{[x,x+h]\mid x\in E_{pq}\}$ 依 Vitali 意义覆盖 E_{pq}. 由 Vitali 覆盖定理可知，存在互不相交的闭区间的并集 $S=\bigcup\limits_k[x_k,x_k+h_k]$，使 $m(E_{pq}-S)=0$.

由式(6.3.6)与 $F(x)$ 的定义，对每个 k 有

$$\frac{1}{h_k}\int_{x_k}^{x_k+h_k}f(t)\mathrm{d}t>q,$$

从而

$$\int_S f(t)\mathrm{d}t>qmS. \tag{6.3.7}$$

如果 $q\geqslant 0$，注意到 $mE_{pq}\leqslant mS$，有 $\int_S f(t)\mathrm{d}t>qmE_{pq}$；如果 $q<0$，注意到 $S\subset(S-E_{pq})\cup E_{pq}\subset(G-E_{pq})\cup E_{pq}$，有

$$mS<\delta+mE_{pq}\leqslant\varepsilon+mE_{pq},$$

从而由式(6.3.7)有

$$\int_S f(t)\mathrm{d}t>q(\varepsilon+E_{pq}),$$

因此，不论 q 的符号如何，有

$$\int_S f(t)\mathrm{d}t>qmE_{pq}-|q|\varepsilon. \tag{6.3.8}$$

另一方面，由于 $m(S-E_{pq})\leqslant m(G-E_{pq})<\delta$，应用(6.3.5)式有 $\int_{S-E_{pq}}f(t)\mathrm{d}t<\varepsilon$. 从而

$$\int_S f(t)\mathrm{d}t<\int_E f(t)\mathrm{d}t+\varepsilon\leqslant pmE_{pq}+\varepsilon. \tag{6.3.9}$$

由式(6.3.8)和式(6.3.9)即得

$$-|q|\varepsilon+qmE_{pq}<pmE_{pq}+\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon>0$ 是任意的，所以 $qmE_{pq}\leqslant pmE_{pq}$，而 $q>p$，所以 $mE_{pq}=0$.

设 E 为 (a,b) 中使 $F'(x)$ 存在且满足 $F'(x)>f(x)$ 的点集，令 (p,q) 表示任意的有理数偶，且 $p<q$. 那么有 $E=\bigcup\limits_{(p,q)}E_{pq}$. 而且 $mE=0$，于是 $F'(x)\leqslant f(x)$ $a.e.$ 于 $[a,b]$.

(2)证明 $F'(x)\geqslant f(x)$ $a.e.$ 于$[a,b]$. 令

$$\varphi(x)=-F(x)=\int_a^x -f(t)\mathrm{d}t+c.$$

由(1)的结果 $\varphi'(x)\leqslant -f(x)$ $a.e.$ 于 $[a,b]$，此即 $F'(x)\geqslant f(x)$ $a.e.$ 于 $[a,b]$.

于是 $F'(x)=f(x)$ $a.e.$ 于 $[a,b]$. 定理得证.

定理 6.3.5(牛顿—莱布尼兹公式) $F(x)-F(a)=\int_a^x F'(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b]$ 成立的充要条件是 $F(x)$ 是绝对连续函数.

证明 必要性. 设 $F(x)-f(a)=\int_a^x F'(t)\mathrm{d}t$. 则 $F(x)$ 是可积函数 $F'(x)$ 的不定积分，因而由定理 6.3.2 可知 $F(x)$ 是绝对连续函数.

充分性. 设 $F(x)$ 是绝对连续函数，由定理 6.3.1 可知 $F(x)$ 是有界变差函数，因而 $F'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

设 $G(x)=\int_a^x F'(t)\mathrm{d}t$，令 $H(x)=F(x)-G(x)$，则由定理 6.3.4 有，

$$\begin{aligned}H'(x)&=F'(x)-G'(x)\\&=F'(x)-F'(x)\ a.e.\ 于\ [a,b]\\&=0\ a.e.\ 于\ [a,b].\end{aligned}$$

而 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是绝对连续函数，因而 $H(x)$ 是绝对连续函数，由定理 6.3.3可知 $H(x)$ 是常数函数. 即

$$H(x)=F(x)-G(x)=c\ (常数),$$

亦即

$$F(x)=G(x)+c=\int_a^x F'(t)\mathrm{d}t+c.$$

令 $x=a$，有 $F(a)=c$. 因此 $F(x)=F(a)+\int_a^x F'(t)\mathrm{d}t$. 定理得证.

该定理也说明，**一个函数 $F(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数的充分必要条件为它是某一个可积函数的不定积分.**

定理 6.3.6（分部积分公式）　设 $f(x)$，$g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，则

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x=f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

证明　$f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，则 $f(x)\cdot g(x)$ 也是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，从而 $f(x)\cdot g(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处可微，且有

$$(f(x)g(x))'=f(x)g'(x)+f'(x)g(x)\,a.e.\ 于\ [a,b].$$

由于 $f(x)\cdot g(x)$ 是绝对连续函数，因而 $(f(x)g(x))'$ 是可积函数. 由定理 6.3.5 知

$$\int_a^b (f(x)g(x))'\mathrm{d}x=f(b)g(b)-f(a)g(a),$$

所以有

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x+\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x=f(b)g(b)-f(a)g(a),$$

即

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x=f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

定理得证.

在本节例 6.3.1 中指出，若 $f(x)$ 满足 Lipschitz 条件，则 $f(x)$ 是绝对连续函数，那么如果 $f(x)$ 是绝对连续函数，它是否满足 Lipschitz 条件呢？回答是不一定的. 下面的例子说明了这个事实.

例 6.3.2　举出一个绝对连续但不满足 Lipschitz 条件的函数.

解　设 $f(x)=\sqrt{x}$，$x\in[0,1]$，则 $\sqrt{x}=\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}$.

而函数 $g(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}$ 在 $[0,1]$ 上是绝对广义 R 可积的，因此在 $[0,1]$ 是 L 可积的. 这样 $\sqrt{x}$ 是可积函数 $g(x)=\frac{1}{2\sqrt{t}}$ 的一个不定积分，因而是 $[0,1]$ 上的绝对连续

函数.

另一方面,若取 $x'=0$, $x''\in(0,1]$ 任意,那么

$$\left|\frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'}\right|=\frac{1}{\sqrt{x''}},$$

即

$$|f(x'')-f(x')|=\frac{1}{\sqrt{x''}}|x''-x'|.$$

对任何 $K>0$,总有 $x''\in(0,1]$,使 $\frac{1}{\sqrt{x''}}>K$.因而不可能存在 $K>0$,使得对于 $[0,1]$ 上的任意两点 x' 和 x'',有

$$|f(x'')-f(x')|\leqslant K|x''-x'|,$$

这就是说 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,1]$ 上不满足 Lipschitz 条件.

例 6.3.3 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数,则

$$\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x=\overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

证明 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是绝对连续函数,因而是 $[a,b]$ 上的有界变差函数,由定理 6.2.4 知 $\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$.

另一方面,对 $[a,b]$ 的任一分划 $T: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$,有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n |f(x_i)-f(x_{i-1})| &= \sum_{i=1}^n\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f'(x)|\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\sup_T\left\{\sum_{i=1}^n |f(x_i)-f(x_{i-1})|\right\}\leqslant\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x,$$

因而

$$\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x=\overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

习　题

1. 如果 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数,证明:$|f(x)|$ 也是 $[a,b]$ 上的有界变差函数,且 $\overset{b}{\underset{a}{V}}(|f|)\leqslant\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$. 反之,若 $|f(x)|$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数,$f(x)$ 是否为 $[a,b]$ 上的有界变差函数.

2. 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的绝对连续函数,$\varphi(x)$ 在全直线上满足 Lipschitz 条件,试证 $\varphi(f(x))$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数.

3. 若 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的绝对连续函数,试证 $|f(x)|$ 为 $[a,b]$ 上的绝对连续函数.

4. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续,对于任意的 $\varepsilon>0$, $f(x)$ 是 $[\varepsilon,1]$ 上的绝对连续函数,且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,试证明 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的绝对连续函数.

5. 设 $\{f_n(x)\}$ 为 $[a,b]$ 上的有界变差函数列,$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$, $x\in[a,b]$,且 $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f_n)\leqslant K(n=1,2,\cdots)$,试证 $f(x)$ 也是 $[a,b]$ 上的有界变差函数.

6. 区间 (a,b) 上任何两个单调函数,若在一稠密集上相等,则它们有相同的连续点.

7. 讨论函数 $f(x)=x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x^{\beta}}(0\leqslant x\leqslant 1,\alpha,\beta>0)$ 是否有界变差和绝对连续.

8. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续,且 $f'(x)\geqslant 0$ $a.e.$ 于 $[a,b]$,试证 $f(x)$ 为增加函数.

9. 设 $\{f_n\}$ 是 $[a,b]$ 上一列绝对连续的增加函数列,若级数 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处收敛,证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续.

10. 设连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上除去有限个点外,具有导数 $f'(x)$,而且 $|f'(x)|\leqslant M$,证明 $f(x)$ 是有界变差函数.

11. 证明在 $[a,b]$ 上处处可微的单调函数为绝对连续函数.

12. 设 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数. 若 $x_0\in(a,b)$ 是 $g(x)$ 的连续点,则 x_0 也是 $\overset{x}{\underset{a}{V}}(g)$ 的连续点.

第 7 章　函数空间 L^p 简介

本章我们讨论函数空间 $L^p(p\geqslant 1)$，L^p 是一切 p 方可积的函数构成的一个函数类，这是一个十分重要的函数空间，这个函数空间在后续课程泛函分析、微分方程、概率论与函数论中都起着相当重要的作用.泛函分析的许多问题都以函数空间 L^p 作为典型的例子，尤其是学习现代偏微分方程理论和方法所涉及到的索伯列夫[①]空间理论，就是以空间 L^p 为基础的.不失一般性，为使问题讨论更为方便和容易接受，我们在实数集 $\mathbf{R}$ 上研究函数空间 L^p.

7.1　空间 L^p

定义 7.1.1　设 E 是 $\mathbf{R}$ 中给定的可测集，$f(x)$ 是定义在 E 上的可测函数.设 $p\geqslant 1$，若 $|f(x)|^p$ 可积，称 $f(x)$ 是 p 方可积的.一切 p 方可积的函数构成一个函数类，记为 $L^p(E)$ 或简记为 L^p，称为 L^p 空间，即

$$L^p=\left\{f(x)\mid\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x<+\infty\right\}$$

例 7.1.1　设 $mE<+\infty$，则有 $L^p\subset L^1$.

证明　设 $f(x)\in L^p$，令 $A=E[|f|\geqslant 1]$，那么由 $p\geqslant 1$，有

$$\begin{aligned}\int_E|f(x)|\mathrm{d}x&=\int_A|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{E-A}|f(x)|\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_A|f(x)|^p\mathrm{d}x+\int_{E-A}\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x+mE\end{aligned}$$

---

① 索伯列夫(Soblev,1908—1989)，前苏联数学家.

$$\leqslant +\infty.$$

因此，$f(x) \in L$，所以当 $p \geqslant 1$ 时，$L^p \subset L^1$.

例 7.1.2 在例 7.1.1 中，如果 $mE = +\infty$，则结论不再成立.

证明 取 $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$，则 $f(x) \in L^p$，$p > 1$；然而，$f(x) \bar{\in} L^1$.

例 7.1.3 找出一个属于 L^p（$p > 1$），而不属于 L 的函数.

解 取 $f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{p}}, & \text{当 } x \in (0,1); \\ 0, & \text{当 } x \in [1, +\infty). \end{cases}$

则容易证明 $f(x) \in L$，但 $f(x) \bar{\in} L^p$，$p > 1$.

定理 7.1.1 L^p 是一个线性空间.

证明 设 $f(x)$，$g(x) \in L^p$，则因为

$$|f(x) + g(x)|^p \leqslant (2\max\{|f(x)|, |g(x)|\})^p$$
$$\leqslant 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p).$$

所以，

$$\int_E |f(x) + g(x)|^p \mathrm{d}x \leqslant 2^p \int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x + 2^p \int_E |g(x)|^p \mathrm{d}x < +\infty.$$

因此，$f(x) + g(x) \in L^p$.

设 α 为复数，则 $\int_E |\alpha f(x)|^p \mathrm{d}x = |\alpha|^p \int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x < +\infty$.

于是 L^p 按函数通常的加法及数乘运算成为线性空间（线性空间的其他公理对 L^p 显然满足）.

定理 7.1.2（Hölder[①] 不等式） 设 $p > 1$，$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$（此时称 p，q 互为相伴数），则对任何 $f(x) \in L^p$，$g(x) \in L^q$，有 $f(x)g(x) \in L$，且有不等式

$$\left|\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \left(\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}. \quad (7.1.1)$$

证明 首先证明当 $p > 1$，$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ 时，对任何正数 A 和 B，有

① 赫尔德（1859—1937），德国数学家.

$$A^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{A}{P}+\frac{B}{q}. \tag{7.1.2}$$

事实上，作辅助函数

$\varphi(t)=t^{\alpha}-\alpha t(0<t<+\infty)$，$0<\alpha<1$，

则 $\varphi'(t)=\alpha[t^{\alpha-1}-1]$，所以在 $(0,1)$ 上，$\varphi'(t)>0$，在$(1,+\infty)$上，$\varphi'(t)<0$，因而 $\varphi(1)$ 是函数 $\varphi(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最大值，即 $\varphi(t)\leqslant\varphi(1)=1-\alpha$，$t\in(0,+\infty)$. 由此可得，$t^{\alpha}\leqslant\alpha t+(1-\alpha)$，$t\in(0,+\infty)$.

令 $t=\dfrac{A}{B}$，代入上面的不等式，那么 $\dfrac{A^{\alpha}}{B^{\alpha}}\leqslant\alpha\dfrac{A}{B}+(1-\alpha)$，两边乘以 B，得到 $\dfrac{A^{\alpha}}{B^{\alpha-1}}\leqslant\alpha A+(1-\alpha)B$.

令 $\alpha=\dfrac{1}{p}$，则 $1-\alpha=\dfrac{1}{q}$，于是上式成为

$$A^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{A}{P}+\frac{B}{q},$$

式(7.1.2)成立.

如果 $(\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}=0$ 或 $(\int_E|g(x)|^q\mathrm{d}x)^{\frac{1}{q}}=0$，则 $f(x)=0$ $a.e.$ 于 E，这时式(7.1.1)自然成立，所以不妨设 $(\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}>0$，$(\int_E|g(x)|^q\mathrm{d}x)^{\frac{1}{q}}>0$. 作函数

$$\varphi(x)=\frac{|f(x)|}{(\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}},$$

$$\psi(x)=\frac{|g(x)|}{(\int_E|g(x)|^q\mathrm{d}x)^{\frac{1}{q}}}.$$

令 $A=|\varphi(x)|^p$，$B=|\psi(x)|^q$，代入不等式(7.1.2)，得到

$$|\varphi(x)\psi(x)|\leqslant\frac{|\varphi(x)|^p}{p}+\frac{|\psi(x)|^q}{q}. \tag{7.1.3}$$

由式(7.1.3)知道 $\varphi(x)\psi(x)$ 在 E 上可积，进而知道 $f(x)g(x)$ 在 E 上可积；再对式(7.1.3)两边积分，得到

$$\int_E |\varphi(x)\psi(x)|\ \mathrm{d}x \leqslant \int_E \frac{|\varphi(x)|^p}{p}\mathrm{d}x + \int_E \frac{|\psi(x)|^q}{q}\mathrm{d}x = 1\,.$$

因此 $\left|\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \left(\int_E |f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_E |g(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$. 证毕.

需要指出的是当 p，q 中有一个为1，而另一个为∞时，我们遇到空间 L^∞，它是 $L^p(p\geqslant 1)$ 空间的一极端情形，称为本性有界函数空间. 如果以量（f 的本性上确界）$\inf\limits_{me=0}\sup\limits_{x\in E-e}|f(x)|$ 代替 Hölder 不等式右边第一个因子，那么当 $p=\infty$，$q=1$ 时，所述不等式仍然正确，而且可以直接得到不需要像上面那样的证明.

设 $f(x)\in L^p$，如果引进记号 $\|f\|_p = \left(\int_E |f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$，称 $\|f\|_p$ 为 $f(x)$ 的范数，这样 Hölder 不等式可以写成 $\left|\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \|f\|_p\|g\|_q\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$.

特别地，当 $p=2$，$q=2$ 时，上述不等式化为 Schwarz[①] 不等式

$$\left|\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \|f\|_2\ \|g\|_2\,,\ f(x)\,,\ g(x)\in L^2\,.$$

利用 Hölder 不等式可以证明关于空间 L^p 的范数的三角不等式，它又称为 Minkowski[②] 不等式.

定理 7.1.3（Minkowski 不等式）设 $f(x)$，$g(x)\in L^p$，$p\geqslant 1$，则有不等式

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p \tag{7.1.4}$$

证明　当 $p=1$ 时，因为 $|f(x)+g(x)|\leqslant|f(x)|+|g(x)|$，由积分性质可知不等式（7.1.4）自然成立. 如果 $p>1$，因为 $f(x)+g(x)\in L^p$，所以 $|f(x)+g(x)|^{\frac{p}{q}}\in L^q\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$.

由 Hölder 不等式，有

$$\int_E |f(x)|\,|f(x)+g(x)|^{\frac{p}{q}}\mathrm{d}x \leqslant \|f\|_p\left(\int_E |f(x)+g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

类似地对 $g(x)$ 也有

---

① 施瓦茨（1843—1921），法国数学家.

② 闵可夫斯基（1864—1909），德国数学家.

$$\int_E |g(x)||f(x)+g(x)|^{\frac{p}{q}}\mathrm{d}x \leqslant \|g\|_p(\int_E |f(x)+g(x)|^p\mathrm{d}x)^{\frac{1}{q}},$$

因而

$$\begin{aligned}\int_E |f(x)+g(x)|^p\mathrm{d}x &= \int_E |f(x)+g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_E |f(x)||f(x)+g(x)|^{\frac{p}{q}}\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_E |g(x)||f(x)+g(x)|^{\frac{p}{q}}\mathrm{d}x \\ &\leqslant (\|f\|_p + \|g\|_p)(\int_E |f(x)+g(x)|^p\mathrm{d}x)^{\frac{1}{q}}\end{aligned} \tag{7.1.5}$$

若 $\int_E |f(x)+g(x)|^p\mathrm{d}x = 0$，则 $\|f+g\|_p = 0$，(7.1.4)式显然成立，若

$$\int_E |f(x)+g(x)|^p\mathrm{d}x \neq 0,$$

则在(7.1.5)式两边除以 $(\int_E |f(x)+g(x)|^p\mathrm{d}x)^{\frac{1}{q}}$，得到

$$(\int_E |f(x)+g(x)|^p\mathrm{d}x)^{1-\frac{1}{q}} \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

由 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，得到

$$\|f+g\|_p = (\int_E |f(x)+g(x)|^p\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

证毕.

上面已经提到，L^p 中元 $f(x)$ 的范数用

$$\|f\| = \|f\|_p = (\int_E |f(x)|^p\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}$$

定义，容易验证，这种范数满足下列**范数公理**：

(1) $\|f\|_p \geqslant 0$；等号成立的充要条件是 $f(x)=0$ $a.e.$ 于 E；

(2) $\|af\|_p = |a|\,\|f\|_p$，a 为复数；

(3) $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.

由定理 7.1.3 以及 L^p 是线性空间知 L^p 是**赋范线性空间**，关于一般的赋范线

性空间理论，在泛函分析课程中会作更深入的讨论.

例 7.1.4　证明：当 $mE<+\infty$，$1\leqslant r<p$ 时，$L^p\subset L^r$.

证明　设 $f(x)\in L^p$，因为 $\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x=\int_E(|f(x)|^r)^{\frac{p}{r}}\mathrm{d}x<\infty$，知 $|f(x)|^r\in L^{\frac{p}{r}}\left(\frac{p}{r}>1\right)$，而与 $\frac{p}{r}$ 相伴的数为 $\frac{p}{p-r}>1$. 显然 $1\in L^{\frac{p}{p-r}}$，从而由 Hölder 不等式，有

$$\int_E|f(x)|^r\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_E(|f(x)|^r)^{\frac{p}{r}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{r}{p}}\left(\int_E 1^{\frac{p}{p-r}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-r}{p}},$$

$$\left(\int_E|f(x)|^r\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}}\leqslant\left(\int_E|f|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_E 1\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-r}{pr}}.$$

即 $\|f\|_r\leqslant\|f\|_p(mE)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}(p>r\geqslant 1)$.

由 $mE<+\infty$ 知，$f(x)\in L^r$.

例 7.1.5　设 p,q,r 为满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1$ 的三个正数，证明：对任何可测函数 $f(x),g(x),h(x)$，有

$$\int_E|f(x)g(x)h(x)|\mathrm{d}x\leqslant\|f\|_p\|g\|_q\|h\|_r$$

证明　若 $\|f\|_p,\|g\|_q,\|h\|_r$ 中至少有一个为 $+\infty$，则不等式显然成立.

若 $f\in L^p,g\in L^q,h\in L^r$，则因为 $g^{\frac{p}{p-1}}\in L^{\frac{(p-1)q}{p}},h^{\frac{p}{p-1}}\in L^{\frac{(p-1)r}{p}}$，而

$$\frac{1}{\frac{(p-1)q}{p}}+\frac{1}{\frac{(p-1)r}{p}}=1,$$

依 Hölder 不等式，得 $g^{\frac{p}{p-1}}h^{\frac{p}{p-1}}\in L$，即 $g(x)h(x)\in L^{\frac{p}{p-1}}$.

且有

$$\int_E|g(x)h(x)|^{\frac{p}{p-1}}\mathrm{d}x\leqslant\|g^{\frac{p}{p-1}}\|_{\frac{(p-1)q}{p}}\|h^{\frac{p}{p-1}}\|_{\frac{(p-1)r}{p}}$$

$$=\left(\int_E|g(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{(p-1)q}}\left(\int_E|h(x)|^r\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{(p-1)r}}.$$

又因为 $g(x)h(x)\in L^{\frac{p}{p-1}}$，$f\in L^p$ 及 $\frac{1}{p}+\frac{1}{\frac{p}{p-1}}=1$，再由 Hölder 不等式，得

$f(x)g(x)h(x)\in L$，且

$$\int_E |f(x)g(x)h(x)|\,dx \leqslant \|f\|_p \|gh\|_{\frac{p}{(p-1)}}$$

$$\leqslant \|f\|_p (\int_E |g(x)|^q dx)^{\frac{1}{q}} (\int_E |h(x)|^r dx)^{\frac{1}{r}}$$

$$= \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r .$$

例 7.1.6 设 $f(x) \in L^p[a,b]$, $p > 0$,证明:

$$\lim_{h\to 0}(\int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x+h) - f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} = 0\ (0 < 2\delta \leqslant b-a) .$$

证明 (1) 首先证明:对任意的 $\varepsilon > 0$,存在 $[a,b]$ 上的连续函数 $\varphi(x)$,使得

$$(\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon .$$

令 $E = [a,b]$, $E_n = E[|f| > n]$,则由积分的绝对连续性知,存在 $\delta_1 > 0$,使得 $e \subset E, me < \delta_1$ 时,有 $(\int_e |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{4}$.

又由 $\lim\limits_{n\to\infty} mE_n = 0$,知存在正整数 N ,使得 $mE_N < \delta_1$. 于是,有

$$NmE_N < (\int_{E_N} |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{4} .$$

由鲁金定理知,存在闭集 $F \subset E - E_N$,使得

$$[m((E-E_N) - F)]^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{4N} ,\text{而 } f(x) \text{在 } F \text{ 上连续.}$$

因为 $f(x)$ 在 F 上是连续的,所以在 $[a,b]$ 上作连续函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x),\ x \in F; \\ \text{函数保持线性},\ x \in E - F. \end{cases}$$

则 $\varphi(x)$ 即为所求. 因为 $|\varphi(x)| \leqslant N$,有

$$(\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} = (\int_F |f(x) - \varphi(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

$$+ (\int_{E_N} |f(x) - \varphi(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

$$+ (\int_{(E-E_N)-F} |f(x) - \varphi(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant (\int_{E_N} |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} + (\int_{E_N} |\varphi(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

$$+2N(m((E-E_N)-F))^{\frac{1}{p}}$$

$$<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$=\varepsilon$$

(2) 由(1),对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $[a,b]$ 上的连续函数 $\varphi(x)$,使得

$$\left(\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

又由 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续知,存在 $0<\delta_2<\delta_1$,使得对于任何 $x',x''\in[a,b]$, 当 $|x'-x''|<\delta_2$ 时,有

$$|\varphi(x')-\varphi(x'')|<\frac{1}{b-a}\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p.$$

因而,当 $|h|<\delta_2$ 时,有

$$\begin{aligned}\left(\int_{a+\delta}^{b-\delta}|f(x+h)-f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}&\leqslant\left(\int_{a+\delta}^{b-\delta}|f(x+h)-\varphi(x+h)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\\&\quad+\left(\int_{a+\delta}^{b-\delta}|\varphi(x+h)-\varphi(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\\&\quad+\left(\int_{a+\delta}^{b-\delta}|\varphi(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}\\&=\varepsilon,\end{aligned}$$

即

$$\lim_{h\to0}\left(\int_{a+\delta}^{b-\delta}|f(x+h)-f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}=0.$$

例 7.1.7 设 $f(x)\in L^p(-\infty,+\infty)$, $g(x)\in L^q(-\infty,+\infty)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p\geqslant1$. 证明: $F(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+t)g(x)\mathrm{d}x$ 是 t 的连续函数.

证明 先证 $\lim\limits_{h\to0}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+h)-f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}=0$

因为对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $N>0$,使得当 $|h|<1$ 时有

$$\left(\int_{-\infty}^{-N} |f(x+h)-f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\left(\int_{N}^{+\infty} |f(x+h)-f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

由例 7.1.6 可知,存在 $0 < h_0 < 1$,使得当 $|h| < h_0$ 时,有

$$\left(\int_{-N}^{N} |f(x+h)-f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{3},$$

所以

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h)-f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

从而证得

$$\lim_{h\to 0}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h)-f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

再证 $F(t)$ 是 t 的连续函数、因为,对任意的 $t \in (-\infty, +\infty)$,依 Hölder 不等式,有

$$\begin{aligned}
|F(t+\Delta t)-F(t)| &\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t+\Delta t)-f(x+t)|\,|g(x)|\mathrm{d}x \\
&\leqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t+\Delta t)-f(x+t)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \|g(x)\|_q \\
&= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+\Delta t)-f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \|g(x)\|_q.
\end{aligned}$$

利用前面证得的结论,知

$$\lim_{\Delta t\to 0} |F(t+\Delta t)-F(t)| = 0.$$

即 $F(t)$ 是 t 的连续函数.

7.2 空间 L^p 的完备性与可分性

定义 7.2.1 设 $f, f_n \in L^p, n \in \mathbf{N}^+$. 如果当 $n \to \infty$ 时,f_n 与 f 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$,则称 $\{f_n\}$ **强收敛**于 f 或 $\{f_n\}$ **依范数收敛**于 f. 这时说 f 是 $\{f_n\}$ 的**强极限**,简记为

$$f_n \xrightarrow{\text{强}} f.$$

强收敛是 L^p 中最基本的一个收敛概念.

由三角不等式知

$$\left|\|f_n\|_p - \|f\|_p\right| \leqslant \|f_n - f\|_p,$$

因而当 f_n 强收敛于 f 时,可推出范数列 $\|f_n\|$ 收敛于 $\|f\|_p$. 这是**范数的连续性**.

例 7.2.1　考察 $L^2[0,1]$ 中的函数列,对于 $n \in \mathbf{N}^+$,设

$$f_n(x) = \begin{cases} n, \ x \in (0, \frac{1}{n}); \\ 0, \ x \in [\frac{1}{n}, 1], x = 0. \end{cases}$$

容易看出当 $x \in [0,1]$ 时, $f_n(x) \to 0 \ (n \to \infty)$.

因为 $\int_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)|^2 \mathrm{d}x = \int_{(0,\frac{1}{n})} n^2 \mathrm{d}x = n \to \infty$, 所以函数列 $\{f_n\}$ 在 $L^2[0,1]$ 中不强收敛于 $f(x) \equiv 0$.

这表明几乎处处收敛(包括处处收敛)的函数列未必能强收敛.

定义 7.2.2　设 $\{f_n\}$ 是 L^p 中的函数列, 如果当 $m,n \to \infty$ 时, 有 $\|f_n - f_m\|_p \to 0$,则称 $\{f_n\}$ 是 L^p 中的**基本列**.

因为 $\|f_n - f_m\|_p \leqslant \|f_m - f\|_p + \|f_n - f\|_p$, 所以当 $\{f_n\}$ 强收敛于 f 时, $\{f_n\}$ 是基本列.

反之,若 $\{f_n\}$ 是 L^p 中的基本列,则 $\{f_n\}$ 强收敛于 L^p 中某一函数 $f(x)$.

这一结果叙述为下面的定理.

定理 7.2.1　设函数列 $\{f_n\}$ 是 L^p 中的基本列, 即当 $m,n \to \infty$ 时, $\|f_n - f_m\|_p \to 0$,则存在函数 $f(x) \in L^p$,使 $f_n \xrightarrow{\text{强}} f$.

证明　设 $\{f_n\}$ 是 L^p 中的基本列. 由归纳法, 可选取正整数列 $\{m_k\}$,使 $m_1 < m_2 < \cdots m_k < \cdots$

当 $n \geqslant m_k$ 时, $\|f_n - f_{m_k}\|_p < \frac{1}{2^k}$, $k = 1, 2\cdots$,

令 $g_m(x) = \sum_{k=1}^{m} |f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x)|$, $m = 1, 2\cdots$, 则 $\{g_m(x)\}$ 是 E 上的非负可测函数的单调增序列. 记 $\lim_{m\to\infty} g_m(x) = g(x)$, 则 $\lim_{m\to\infty} (g_m(x))^p = (g(x))^p$.

由 *Fatou* 定理，有

$$\int_E (g(x))^p \mathrm{d}x \leqslant \liminf_{m\to\infty} \int_E (g_m(x))^p \mathrm{d}x.$$

而由 Minkowski 不等式知

$$\begin{aligned}(\int_E (g_m(x))^p \mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}} &\leqslant \sum_{k=1}^{m} (\int_E |f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x)|^p \mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \| f_{m_{k+1}} - f_{m_k} \|_p \\ &< \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k} \\ &< 1,\end{aligned}$$

所以 $\int_E (g(x))^p \mathrm{d}x \leqslant 1$.

这说明 $g(x)$ 必然是在 E 上几乎处处有限，从而函数级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x))$ 在 E 上几乎处处绝对收敛，令

$$f(x) = f_{m_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x)) ,$$

则 $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{m_k}(x)$，又 $|f(x)| \leqslant |f_{m_1}(x)| + g(x)$ $a.e.$ 于 E ，所以 $f(x) \in L^p$.

对于任意给定的 $\varepsilon > 0$ ，取正整数 N ，使 $n \geqslant m \geqslant N$ 时，$\| f_n - f_m \|_p < \varepsilon$ ，则当 k 充分大使 $m_k \geqslant N$ 时，对一切 $n \geqslant N$ 都有 $\| f_n - f_{m_k} \|_p < \varepsilon$. 而

$$\lim_{k\to\infty} |f_n(x) - f_{m_k}(x)|^p = |f_n(x) - f(x)|^p \ a.e. \text{ 于 } E .$$

再应用 Fatou 定理，便得

$$\begin{aligned}\| f_n - f \|_p &= (\int_E |f_n(x) - f(x)|^p \mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant (\liminf_{k\to\infty} \int_E |f_n(x) - f_{m_k}(x)|^p \mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant \varepsilon (n \geqslant N).\end{aligned}$$

这说明 $f_n \xrightarrow{\text{强}} f$. 证毕.

定理 7.2.1 说明了 L^p 中的任何基本列必有强极限，且极限函数属于 L^p ，这也表明了空间 L^p 是**完备**的.

定义 7.2.3　设 A 是 L^p 的一个子集，若对任一个 $f(x)\in L^p$，恒有函数列 $\{g_n\}\subset A$，使 $g_n\xrightarrow{\text{强}}f$，则称 A 在 L^p 中稠密. 如果存在可列子集 A，使 A 在 L^p 中**稠密**，则说 L^p 是**可分**的. 可以证明 L^p 是可分的，见参考书目[4].

例 7.2.2　设 $1\leqslant p<+\infty$，$B[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上的有界可测函数全体，则 $B[a,b]$ 在 $L^p[a,b]$ 中稠密.

证明　对 $f(x)\in L^p[a,b]$，对每一个正整数 n，作函数列

$$f_n(x)=\begin{cases}f(x), & |f(x)|\leqslant n;\\ 0, & |f(x)|>n.\end{cases}$$

则 $\{f_n\}$ 是有界可测函数列，且

$$\int_{[a,b]}|f_n(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x=\int_{[|f|>n]}|f(x)|^p\mathrm{d}x.$$

因为 $|f(x)|^p\in L[a,b]$，由积分的绝对连续性，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $e\subset[a,b]$，$me<\delta$ 时，有 $\int_e|f(x)|^p\mathrm{d}x<\varepsilon^p$.

因为 $n^p\cdot m[|f|>n]\leqslant\int_{[|f|>n]}|f(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant\int_{[a,b]}|f(x)|^p\mathrm{d}x$，所以存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时，$m[|f|>n]<\delta$，从而 $\|f_n-f\|_p=\left(\int_{[|f|>n]}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon$. 因此，$f_n\xrightarrow{\text{强}}f$，$B[a,b]$ 在 $L^p[a,b]$ 中稠密.

例 7.2.3　设 $1\leqslant p<+\infty$，则 $C[a,b]$ 在 $L^p[a,b]$ 中稠密.

证明　不难证明如下的事实：若 E 是距离空间，A，B，C 是 E 的点集，C 在 B 中稠密，B 在 A 中稠密，则 C 在 A 中稠密.

而由例 7.2.2 知 $B[a,b]$ 在 $L^p[a,b]$ 中稠密，因此，只需证 $C[a,b]$ 在 $B[a,b]$ 中按 $L^p[a,b]$ 的距离是稠密的.

任取 $f(x)\in B[a,b]$，设 $f(x)\leqslant K$，$x\in[a,b]$. 任取 $\varepsilon>0$，则依鲁金定理，对于正数 $\delta=\left(\frac{\varepsilon}{2K}\right)^p$，存在 $g(x)\in C[a,b]$，使得 $m[f\neq g]<\delta$. 不妨设 $|g(x)|\leqslant K$，否则将 $g(x)$ 换成连续函数 $\max\{\min(g(x),k),-k\}$ 就可以了. 记 $E=[f\neq g]$，于是

$$\int_{[a,b]}|f(x)-g(x)|^p\mathrm{d}x=\int_E|f(x)-g(x)|^p\mathrm{d}x$$

$$\leqslant (2K)^p mE$$
$$< \varepsilon^p.$$

即 $\| f-g \|_p < \varepsilon$. 此即 $C[a,b]$ 在 $B[a,b]$ 中按 $L^p[a,b]$ 的距离是稠密的.

参考书目

[1]程其襄,张奠宙,魏国强,等.实变函数与泛函分析基础[M].第2版.北京:高等教育出版社,2007.

[2]张一鸣,杨有锠,王晓斐,等.实变函数与泛函分析[M].(上册).上海:上海科学技术出版社,1988.

[3]江泽坚,吴智泉.实变函数论[M].第2版.北京:高等教育出版社,1994.

[4]郑维行,王声望.实变函数与泛函分析概要(第一册)[M].第3版.北京:高等教育出版社,2005.

[5]曹广福.实变函数论[M].北京:高等教育出版社,2000.

[6]夏道行,吴卓人,严绍宗,等.实变函数论与泛函分析[M].(上册).第2版.北京:高等教育出版社,1983.

[7]徐荣权,金长泽.实变函数论[M].沈阳:辽宁人民出版社,1984.

[8]孙清华,孙昊.实变函数内容、方法与技巧[M].武汉:华中科技大学出版社,2004.

[9]И.П.那汤松.实变函数论(上册)[M].第2版.徐瑞云译.北京:人民教育出版社,1958.

[10]华东师范大学数学系.数学分析(上册)[M].第3版.北京:高等教育出版社,2001.

[General Information]
书名=实变函数
作者=刘绍武，莫海平编著
页数=195
SS号=13245954
DX号=
出版日期=2011.08
出版社=黑龙江大学出版社